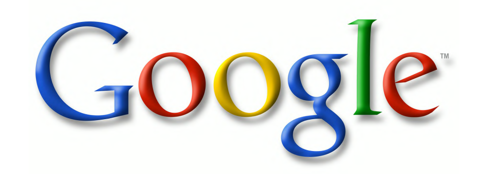


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

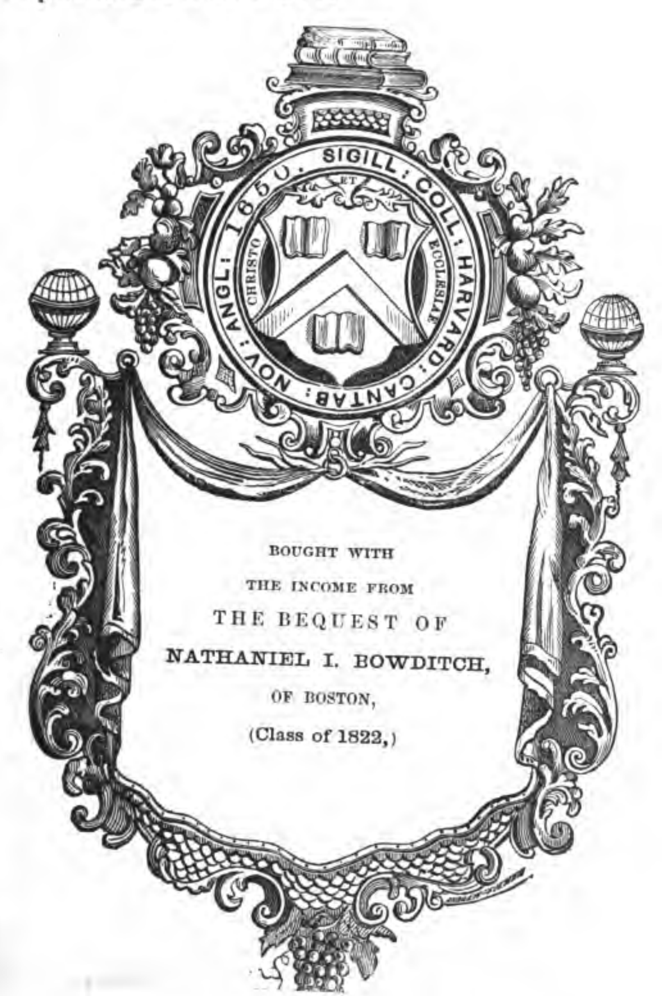
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3208.93.3



SCIENCE CENTER LIBRARY





Studien

zur

Theorie der infinitesimalen Transformation.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

eingereicht von

Eduard Ritter von Weber.

München.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

1893.

Math 3208.93.3

HARVARD COLLEGE
AUG 3 1907
LIBRARY.

Bowditch fund.

EINLEITUNG.

In der *Lie*'schen Transformationstheorie wird die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

bekanntlich auf die Ermittelung einer infinitesimalen Transformation*)

$$Uf \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

zurückgeführt, durch welche die Ebene der x, y eine unendlich kleine Verschiebung in sich erfährt, dergestalt, dass dabei eine einzelne der Integralkurven von (1) in eine benachbarte desselben Systems transformiert wird. In dieser allgemeinsten Formulierung ist das Problem der zu einer Gleichung (1) gehörigen infinitesimalen Transformationen noch sehr unbestimmt, insoferne, als ja das System der Bahnkurven, längs welcher die einzelnen Punkte der Ebene bei der Transformation sich bewegen, ganz nach Belieben gewählt werden kann, etwa indem man

$$\eta = \xi . \zeta$$

setzt, unter ζ eine willkürliche Funktion von x und y verstanden. Diese Möglichkeit legt uns die Frage nahe, erstlich,

*) Vgl. *S. Lie*, Vorlesungen über Differentialgleichungen, herausgeg. von *Scheffers*.

welche Anhaltspunkte für die geometrischen und funktionentheoretischen Eigenschaften der Funktion ξ sich bei allgemeinster Annahme von ζ gewinnen lassen, dann aber auch, wie man etwa durch spezielle Verabredungen über das Bahnkurvensystem ein möglichst einfaches und anschauliches Verhalten der gedachten Funktion erzielen und damit das Problem der infinitesimalen Transformation in gewissem Sinne vereinfachen kann. Diese beiden Aufgaben bilden den Zielpunkt der nachfolgenden Entwickelungen, und zwar sollen der ersten von beiden das zweite und ein Teil des dritten Kapitels gewidmet sein, während wir in den letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit ein spezielles, auf die Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades bezügliches Problem in Angriff nehmen wollen, indem wir dabei an die zweite der vorhin erwähnten Fragestellungen anknüpfen.

Wird ζ willkürlich angenommen, so stellt sich ξ als Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades dar, und wir können auf diese die gewöhnlichen Integrationsmethoden in Anwendung bringen. Deuten wir x, y, ξ als rechtwinklige Coordinaten des Raumes, so haben wir, um eine allgemeine Integralfläche der erwähnten Differentialgleichung zu erhalten, in bekannter Weise gewisse Raumkurven, die sog. Charakteristiken, nach irgend einem Gesetze zu einer Fläche

$$f(x, y, \xi) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

zusammenzuordnen. Dabei zeigt sich, dass selbst unter Zugrundelegung einer Gleichung (1), welche y' im ersten Grade, x, y aber rational enthält, einem Punkte x, y keineswegs blos ein einziges ξ zugeordnet erscheint, dass also die xy-Projektion der Fläche (3) die xy-Ebene nicht ein-, sondern mehrfach überdeckt; eine solche Fläche werden wir im Folgenden kurz als mehrblätterig bezeichnen.

Indes gibt schon ein verhältnismässig einfacheres, hieher gehöriges Problem zu ganz entsprechenden Betrachtungen Anlass: wir meinen die Darstellung des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung (1) in der Form:

$$\omega(x, y) = C$$

bez. allgemeiner:

$$f(x, y, C) = 0.$$

Indem wir, dem Vorigen analog, die Grösse C als dritte Coordinate z eines rechtwinkeligen Systems interpretieren, können wir auch diese Frage mit der geometrischen Integrationstheorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in Verbindung setzen. Wir finden dann, dass selbst für Differentialgleichungen ersten Grades die Fläche:

$$\omega(x, y) = z \qquad \textbf{(4)}$$

im allgemeinen keineswegs einblätterig ausfällt, d. h. dass es nicht ohne weiteres gelingt, die Integralkurven des Systems je durch eine einzige Constante zu charakterisieren, und es entspringt die Aufgabe, die verschiedenen Blätter der Fläche (4) auch analytisch darzustellen. Da diese Untersuchung in manchem Betracht einfacher ausfällt, als die entsprechende für die infinitesimale Transformation, so wollen wir sie sogleich im nachfolgenden ersten Kapitel erledigen.

Die Möglichkeit einer analytischen Behandlung unseres Gegenstandes ist jedoch, der Natur der Sache nach, ziemlich beschränkt. Man weiss zwar*), dass in der Nähe eines Punktes x_0, y_0 der Ebene im allgemeinen eine Integralfunction ω existiert, welche nach positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ fortschreitet und innerhalb eines endlichen Gebietes konvergiert, doch lehrt andererseits schon der geometrische

---

*) Vgl. z. B. *Goursat,* Leçons sur l'intégration des Équations aux Dérivées Partielles Nro. 10.

Augenschein, dass, abgesehen von den singulären Stellen der Differentialgleichung, auch für die Punkte der sogenannten „Grenzcyclen"*) eine Darstellung (4) jedenfalls nicht existiert, so dass sich über die Convergenz eines solchen ω wenig allgemeines aussagen lässt. Wollen wir daher auf analytische Hülfsmittel nicht ganz verzichten, so müssen wir den Standpunkt, den wir bezüglich der funktionentheoretischen Seite unserer Frage einnehmen wollen, folgendermassen formulieren: Wir betrachten nur solche Gebiete der Ebene, innerhalb welcher Besonderheiten der gedachten Art nicht auftreten, für die also, nach geeigneter Fixierung der Anfangsbedingungen, eventuell auch unter Annahme eines passenden Coordinatensystems, die Integralfunktion in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Nur dann dürfen wir an die formalen Bedingungen, denen die Coeffizienten solcher Entwickelungen unterliegen, funktionentheoretische bez. geometrische Schlüsse knüpfen.

---

*) Vgl. *Poincaré,* Lionville's Journal, S. 3, t. VII und VIII.

I. Kapitel.

§ 1. Die Integralfläche einer gewöhnlichen Differentialgleichung I. Ordnung und I. Grades.

Wir setzen (1) in der Form voraus:

$$y' = \frac{X}{Y}, \tag{5}$$

wo wir unter X, Y der Kürze halber ganze rationale Funktionen von x und y verstehen wollen; man habe etwa:

$$\left.\begin{aligned} Y &\equiv \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \tfrac{1}{2}(\lambda_{11} x^2 + 2\lambda_{12} x y + \lambda_{22} y^2) \\ &\quad + \tfrac{1}{6}(\lambda_{111} x^3 + ..) + .. \\ X &\equiv \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 y + \tfrac{1}{2}(\mu_{11} x^2 + 2\mu_{12} x y + \mu_{22} y^2) \\ &\quad + \tfrac{1}{6}(\mu_{111} x^3 + ..) + .. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Geben wir dann dem allgemeinen Integral von (5) die übliche Form

$$\omega(x, y) = C, \tag{7}$$

so genügt ω der Gleichung

$$X \frac{\partial \omega}{\partial x} + Y \frac{\partial \omega}{\partial y} \equiv 0. \tag{8}$$

Setzt man daher an:

$$\omega \equiv \alpha_1 x + \alpha_2 y + \tfrac{1}{2}(\alpha_{11} x^2 = 2\alpha_{12} x y + \alpha_{22} y^2) + .., \tag{9}$$

so erhält man aus der Identität (1) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die $\alpha_{ik}..$:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \mu_0 \alpha_1 + \lambda_0 \alpha_2 = 0, \\
(2) & \mu_0 \alpha_{11} + \mu_1 \alpha_1 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_0 \alpha_{12} = 0, \\
(3) & \mu_0 \alpha_{12} + \mu_2 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_0 \alpha_{22} = 0, \\
(4) & \frac{1}{2} \mu_0 \alpha_{111} + \mu_1 \alpha_{11} + \frac{1}{2} \mu_{11} \alpha_1 + \frac{1}{2} \lambda_{11} \alpha_2 + \lambda_1 \alpha_{21} \\
 & \qquad + \frac{1}{2} \lambda_0 \alpha_{211} = 0, \\
(5) & \mu_0 \alpha_{112} + \mu_1 \alpha_{12} + \mu_2 \alpha_{11} + \mu_{12} \alpha_1 + \lambda_{12} \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_{21} \\
 & \qquad + \lambda_1 \alpha_{22} + \frac{1}{2} \lambda_0 \alpha_{212} = 0, \\
(6) & \frac{1}{2} \mu_0 \alpha_{122} + \mu_2 \alpha_{12} + \frac{1}{2} \mu_{22} \alpha_1 + \frac{1}{2} \lambda_{22} \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_{22} \\
 & \qquad + \frac{1}{2} \lambda_0 \alpha_{222} = 0, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(10) & \frac{1}{6} \mu_0 \alpha_{1222} + \frac{1}{2} \mu_2 \alpha_{122} + \dots \qquad \dots + \frac{1}{6} \lambda_0 \alpha_{2222} = 0, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(15) & \frac{1}{24} \mu_0 \alpha_{12222} + \frac{1}{6} \mu_2 \alpha_{1222} + \dots \qquad \dots \frac{1}{24} \lambda_0 \alpha_{22222} = 0. \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad \textbf{(10)}$$

Diese Relationen zeigen, dass von den Coeffizienten $\alpha_{ik}\dots$ der xy-Combinationen bis zum n ten Grade einschliesslich genau n willkürlich bleiben, d. h. dass ω noch die Coeffizienten einer willkürlichen Funktion von einer Variabeln enthält.

Wir können nun eine Integralfläche dadurch entstehen lassen, dass wir von den durch das simultane System

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{0}$$

definierten Kurven, den „Charakteristiken" der Gleichung (8), alle diejenigen zusammenfassen, die durch irgend eine Raumkurve hindurchgehen. Die Gleichungen der letzteren wollen wir in der Form schreiben:

$$\psi(x, y) = 0, \qquad \textbf{(11)}$$

$$z = \varphi(x, y). \qquad \textbf{(12)}$$

Die Kurve (11) gehe durch den Coordinatenanfangspunkt, so zwar, dass y vermöge (11) in eine Potenzreihe nach x:

$$y = \pi(x) \qquad \textbf{(13)}$$

entwickelt werden kann. Ist auch die Funktion φ als eine

Potenzreihe der beiden Variabeln x und y darstellbar, so kommt unsere Bestimmung der Integralfläche offenbar darauf hinaus, dass wir verlangen, die Funktion ω solle sich für $y = \pi(x)$ auf $\varphi[x, \pi(x)]$ reduzieren. Die Identität:

$$\omega[x, \pi(x)] \equiv \varphi[x, \pi(x)], \tag{14}$$

wo nun rechts wie links Potenzreihen einer Variabeln stehen, liefert dann durch Coeffizientenvergleichung ein System linearer Relationen zwischen den $\alpha_{ik}\ldots$, durch welche die Bestimmung dieser Grössen vervollständigt wird.

Für die Zahl und den Zusammenhang der Blätter unserer Integralfläche bietet sich naturgemäss der weiteste Spielraum. Ist z. B. φ eine mehrdeutige Funktion, die indes nicht gerade im Coordinatenanfangspunkt verzweigt sei, so können wir die verschiedenen Zweige derselben als durch Potenzreihen gegeben voraussetzen; jeder dieser Zweige liefert dann für die Integralfläche ein Blatt, dessen Reihenentwickelung sich aus (10) sofort ergibt. Diese Vorkommnisse können wir im übrigen in einfachster Weise dadurch beseitigen, dass wir φ in dem ganzen, für uns in Betracht kommenden Stück der Ebene als eindeutig voraussetzen, eine Annahme, an der wir im Folgenden überall festhalten wollen. Minder einfach lässt sich eine andere Besonderheit vermeiden, die in jedem Punkte eintritt, wo die Integralkurven unserer Differentialgleichung die Kurve (11) berühren, für den also ausser (11) auch noch die Relation

$$X\frac{\partial \psi}{\partial x} + Y\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

besteht. Verlegt man nämlich den Coordinatenanfangspunkt in eine solche Stelle, so zeigt sich, dass den Bedingungsgleichungen, die uns vorhin zur Bestimmung der ω-Coeffizienten dienten, nicht mehr genügt werden kann. Wir wenden uns nunmehr zu einer ausführlichen Diskussion dieses Vorkommnisses.

§ 2. Umrisskurven der Integralfläche.

Um unsere Betrachtungen nicht unnötig zu komplizieren, wollen wir unter Beibehaltung der vorhin getroffenen Verabredung über die Gleichung (12) die Kurve, längs welcher wir die Charakteristiken anreihen, als in der yz-Ebene gelegen voraussetzen, so dass (11) übergeht in:

$$x = 0, \tag{16}$$

worauf (12) in der Form

$$z = \varphi(y) = \beta_1 y + \tfrac{1}{2}\beta_2 y^2 + \tfrac{1}{6}\beta_3 y^3 + \ldots \tag{17}$$

geschrieben werden kann; φ möge für alle diejenigen reellen Punkte der y-Axe konvergieren, die innerhalb des am Schlusse der Einleitung charakterisierten Bereiches gelegen sind, und daselbst auch als eindeutig vorausgesetzt werden.

Die Relation (15) geht über in:

$$X = 0; \tag{18}$$

ist demnach im Anfangspunkt $\mu_0 \gtrless 0$, so haben wir

$$\alpha_2 = \beta_1;\ \alpha_{22} = \beta_2;\ \ldots\ldots \alpha_{22222} = \beta_5 \ldots\ldots \tag{19}$$

zu setzen und dann aus (10) die fehlenden α_{ik}.. zu bestimmen.

Man pflegt sonst bei den Untersuchungen über das allgemeine Integral einer Differentialgleichung wohl auch von der Darstellung

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \tfrac{1}{2} p_2 (x - x_0)^2 + \tfrac{1}{6} p_3 (x - x_0)^3 + \ldots \tag{20}$$

auszugehen; $x_0 y_0$ ist dabei irgend eine nicht singuläre Stelle der Differentialgleichung, y_0' der dazu gehörige Wert von y', die p_i sind gewisse rationale Funktionen der genannten Grössen. Diese Form des Integrals lässt sich leicht in unsere bisherigen Betrachtungen einordnen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur irgend eine Relation zwischen x_0 und y_0 anzunehmen und eine der beiden Grössen x_0, y_0 als Integrationsconstante zu wählen. Gelingt es dann auf irgend eine Weise, z. B. y_0 aus (20) als

Funktion von x und y darzustellen, so sind wir wiederum auf die Integralform (7) geführt. Setzen wir insbesondere

$$x_0 = 0, \qquad (21)$$

so ersieht man leicht, dass diese Annahme identisch ist mit der andern:

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_3 = \ldots\ldots = 0,$$

so dass also die Charakteristiken längs der Geraden

$$y = z$$

aufgereiht werden.

Es liegt in der Natur der Relationen (10), dass sie für jeden Punkt des der Betrachtung zu Grunde liegenden Ebenenstückes, also auch der y-Axe, soweit sie in Frage kommt, Geltung haben müssen, d. h. wenn wir die Coeffizienten der Entwickelung von ω, X und Y nach Potenzen von x und $y - y^{(i)}$ durch den obern Index $^{(i)}$ kennzeichnen, so werden die Gleichungen (10) auch für $\alpha_{ik}^{(i)} \ldots$, $\lambda_{ik}^{(i)} \ldots$, $\mu_{ik}^{(i)} \ldots$ bestehen. Gilt nun für den Punkt $0, y^{(i)}$ die Gleichung

$$X = 0 \quad \text{oder} \quad \mu_0^{(i)} = 0, \qquad (22)$$

d. h. berührt in dem Punkte $0, y^{(i)}$ eine Integralkurve die y-Axe (ohne dass gleichzeitig $\lambda_0^{(i)} = 0$), so kann den Gleichungen (10) durch endliche Werte der $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_{11}^{(i)}$.. nicht mehr genügt werden, solange die $\beta_k^{(i)}$ keinen besonderen Bedingungen genügen. Aus dem Umstand, dass bei der Annäherung an einen solchen Punkt die α_1, $\alpha_{11} \ldots$, also auch die Funktion $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ unendlich gross werden, während die β_i endlich bleiben, könnte man schon schon schliessen, dass sich die Tangentenebene der Integralfläche in dem Punkte

$$0,\ y^{(i)},\ z^{(i)} = \varphi(y^{(i)})$$

vertikal stellt und mit der yz-Ebene zusammenfällt. Wir werden später dafür eine weitere Bestätigung erhalten. Es

geht also durch den betreffenden Punkt der Fläche eine Umrisskurve hindurch. Andererseits aber muss die durch Verticalprojektion entstehende Umrisskurve der Integralfläche aus Charakteristiken bestehen, da sich sonst für die Projektionen der Charakteristiken auf die xy-Ebene eine Enveloppe ergeben würde, was bei einer Differentialgleichung ersten Grades offenbar nicht möglich ist. Daraus ergibt sich, dass längs der durch den Punkt 0, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ laufenden Charakteristiken zwei Blätter der Integralfläche in einfachster Weise zusammenhängen.

Sei z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y}$$

vorgelegt, und verlangen wir, dass sich ω für $x = 0$ auf y reduziere, d. h. ordnen wir die Charakteristiken längs der Geraden $x = 0$, $y = z$ an, so wird die Integralfläche:

$$z = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 - a^2},$$

die Gleichung eines vertikalstehenden einschaligen Rotationshyperboloids, das den Kreis

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

als Kehlkreis besitzt.

---

§ 3. Besondere Festsetzung über die Funktion φ.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass einer der Punkte 0, $y^{(i)}$, für die X verschwindet, zum Anfangspunkt des Coordinatensystems gemacht sei. Dann hat man also

$$\mu_0 = 0. \tag{23}$$

Es ist leicht zu sehen, dass durch eine passende Bestimmung der β_i die vorhin konstatierte Besonderheit der

Integralfläche verschwindet. Berücksichtigt man nämlich (23), so kann man wegen $\lambda_0 \neq 0$ zunächst

$$\beta_1 = \alpha_2 = 0 \tag{24}$$

setzen. Substituiert man dies in die 2te, 3te und 6te der Relationen (10), so erhält man durch Elimination der Grössen α_1 und α_{12} eine lineare homogene Relation zwischen $\alpha_{22} = \beta_2$ und $\alpha_{222} = \beta_3$, die wir so schreiben:

$$\sigma\beta_2 + \tau\beta_3 = 0.$$

Wir können ebenso aus den Gleichungen (10) 2, 3, 4, 7, 8, 10, 15, die Grössen α_1, α_{11}, α_{12}, α_{112}, α_{122}, α_{1222} eliminieren, und erhalten so eine lineare homogene Relation zwischen den Grössen $\alpha_{22} = \beta_2$, $\alpha_{222} = \beta_3 \ldots\ldots \alpha_{22222} = \beta_5$, welche unter Berücksichtigung der soeben erhaltenen die Form annimmt:

$$\sigma'\beta_3 + \tau'\beta_4 + \rho'\beta_5 = 0.$$

Allgemein ergibt sich, dass man durch dies Eliminationsverfahren ein System von unendlich vielen Relationen erhält, das durch Berücksichtigung der jedesmal vorhergehenden in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1 = 0,\\
&\sigma\beta_2 + \tau\beta_3 = 0,\\
&\sigma'\beta_3 + \tau'\beta_4 + \rho'\beta_5 = 0,\\
&\sigma''\beta_4 + \tau''\beta_5 + \rho''\beta_6 + \omega''\beta_7 = 0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Dabei sind die σ und $\tau\ldots$ gewisse rationale und ganze Funktionen der $\lambda_{ik}\ldots$ und $\mu_{ik}\ldots$ Ist die vorgelegte Differentialgleichung allgemein, so wird keiner dieser Coeffizienten verschwinden. Man sieht, dass die Beziehungen (25) noch unendlich viele der β_i willkürlich lassen.

Unterwerfen wir also die Coeffizienten von φ den Bedingungen (25), so kann man aus der dritten Gleichung (10) α_1, dann aus der zweiten α_{12} bestimmen; hierauf liefert die

vierte α_{11} u. s. w. Die Integralfläche wird sich dann in der Nähe des Nullpunktes vollkommen regelmässig verhalten.

Wir erwähnten schon vorhin, dass, wenn man die Coeffizienten der Entwickelung von ω, X, Y nach Potenzen von $x - x^{(i)}$, $y - y^{(i)}$ bez. mit $\alpha_{ik}^{(i)}\ldots$, $\mu_{ik}^{(i)}\ldots$, $\lambda_{ik}^{(i)}\ldots$ bezeichnet, die Relationen (10) auch für diese gestrichenen Grössen gelten, vorausgesetzt, dass $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ ein Punkt unseres Bereiches ist. Infolgedessen zieht die Gleichung

$$\mu_0^{(i)} = 0 \quad (26)$$

auch das in den gestrichenen Coeffizienten geschriebene Gleichungssystem (25) nach sich, mit andern Worten:

Haben wir durch spezielle Wahl unseres φ die Verzweigung der Integralfläche in einem der Punkte 0, $y^{(i)}$, für die X verschwindet, beseitigt, so verschwindet sie dadurch auch in allen übrigen dem Bereiche angehörenden Punkten dieser Art, vorausgesetzt natürlich, dass die durch die Relationen (25) „normierte Anfangsfunktion" φ für alle diese Punkte auch wirklich konvergiert. Genauere Angaben über diese Convergenz lassen sich, wie es scheint, nicht allgemein, sondern nur für jeden speziellen Fall durch gestaltliche Diskussion des vorgelegten Integralkurvensystems erzielen.

Wir wollen zur Veranschaulichung der erwähnten Thatsache aus der grossen Fülle verschiedener gestaltlicher Möglichkeiten zwei besonders einfache Fälle herausgreifen.

Man habe auf der y-Axe zwei Punkte $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ der erwähnten Art, und es möge der Gesamtverlauf der Integralkurven zunächst durch Fig. 1a dargestellt sein. Die z-Axe stehe in 0 senkrecht auf der Zeichnungsebene. Ordnen wir jetzt diejenigen Charakteristiken, die durch die Gerade $y = z$ hindurchgehen, zu einer Integralfläche zusammen, so nimmt der Schnitt dieser Fläche mit der $y = z$-Ebene, wie man leicht sieht, die in Fig. 1b gezeichnete Gestalt an. Diese

Figur lässt zunächst erkennen, dass durch die Punkte P $(0, y^{(1)}, C^{(1)})$ und Q $(0, y^{(2)}, C^{(2)})$ je ein zweiter Zweig der Schnittkurve hindurchgeht, wie es dem Umstande entspricht, dass die yz-Ebene Tangentenebene der Fläche wird. Ferner ist ersichtlich, dass die durch P und Q laufenden Charakteristiken Umrisskurven der Fläche sind. In der That besitzt unsere Schnittkurve in den Punkten A und B, wo diese Charakteristiken die yz-Ebene weiterhin schneiden, vertikale Tangenten.

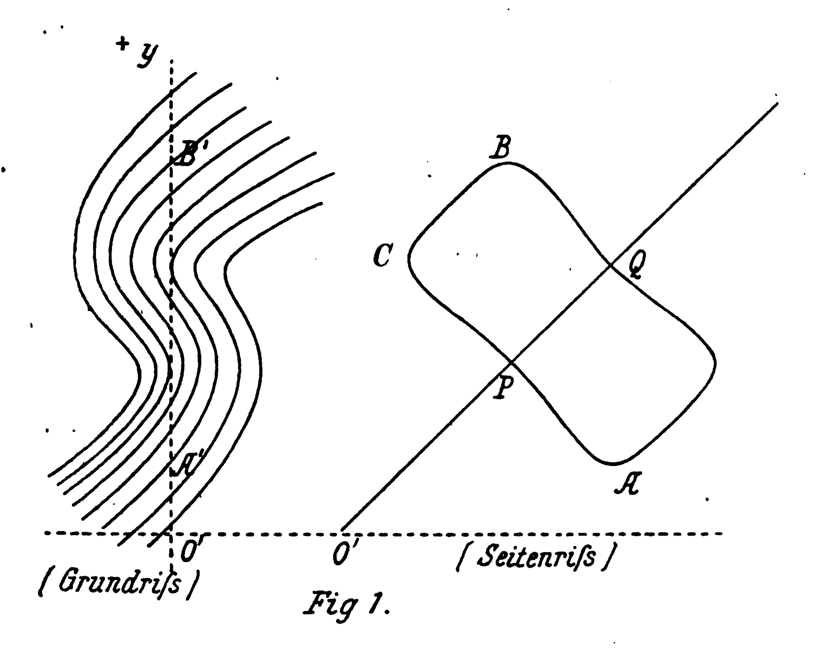


Fig 1.

Hätten wir nun von vorneherein den Zweig APC als Ausgangskurve gewählt, so hätte sich die entstehende Integralfläche an der Stelle C ganz regelmässig verhalten. Dieser zweite Zweig, den wir mit $z = \psi(y)$ bezeichnen, genügt also an der Stelle $y^{(2)}$ den Relationen (25) und zwar unabhängig von der Natur des ersten Zweiges PQO oder $z = \varphi(y)$.

Wenn also die Coeffizienten von φ so bestimmt werden, dass φ mit ψ zusammenfällt, d. h. also, wenn die Relationen (25) im Punkte $y^{(1)}$ erfüllt sind, so sind sie es auch im Punkte $y^{(2)}$. Man sieht leicht, wie diese Schlussweise auf mehrere Punkte $y^{(i)}$ anwendbar bleibt.

Seien zweitens wie vorhin zwei Punkte $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ auf der y-Axe vorhanden, diesmal aber der Verlauf des Systems

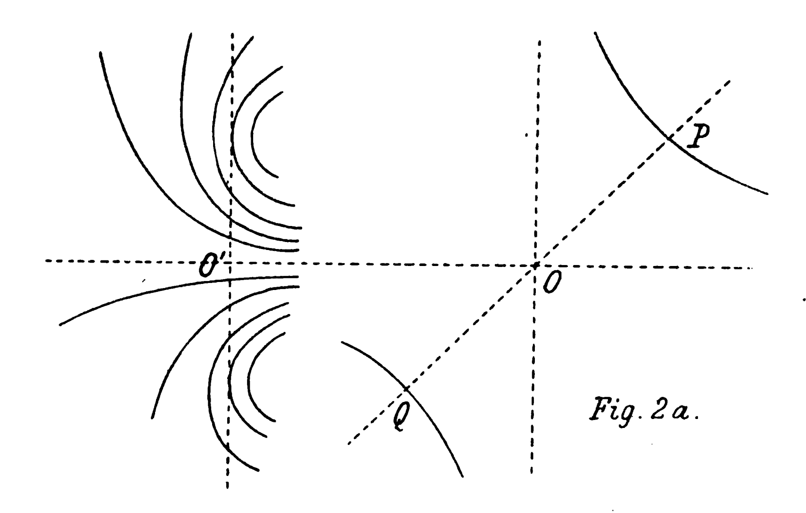
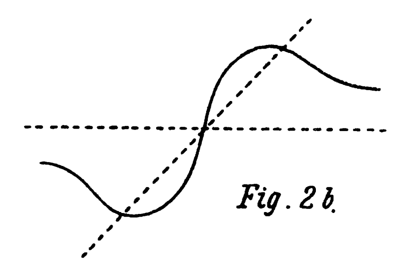


Fig. 2a.

durch Fig. 2a dargestellt. Wir ordnen die Charakteristiken wiederum längs der Geraden $y = z$ an. Die Schnittkurve der entstehenden Fläche mit der yz-Ebene besteht dann nur aus zwei Zweigen, die Integralfläche wird also zweiblätterig sein, während die vorige aus drei Blättern sich zusammensetzte. Lassen wir also die beiden Zweige der Schnittkurve in P. zusammenfallen, so tritt dies von selbst auch im Punkte Q ein, die Kurve $z = \varphi(y)$ nimmt dann etwa die Gestalt an, welche durch Fig. 2b dargestellt ist. Man kann zur Realisierung dieses Falles ein Kreisbüschel mit reellen, auf derselben Seite der y-Axe liegenden Grenzpunkten benutzen.

Unter den zu Anfang dieses Paragraphen über den Nullpunkt gemachten Voraussetzungen gelangen wir demnach zu dem nachfolgenden Resultat:

Wenn wir die Coeffizienten β_i der Funktion φ den Bedingungen (25) unterwerfen, so erhalten wir vermöge der Beziehungen (10) und (25) eine Fläche $\omega = C$, welche innerhalb unseres Bereiches nirgends den im vorigen Paragraphen erwähnten Zusammenhang aufweist; wir wollen eine solche Fläche als eine einblätterige bezeichnen.



Der Grund, aus dem wir die singulären Stellen und Grenzcyclen prinzipiell von unserer Betrachtung ausschliessen mussten, liegt darin, dass das Verhalten der Integralfläche an solchen Stellen weder geometrisch noch analytisch hinreichend einfache Resultate liefert. Die Betrachtung derjenigen Punkte, welche Poincaré*) als „nœuds“ und „foyers“ bezeichnet, zeigt besonders deutlich das äusserst verwickelte Verhalten der Integralfläche. Aber auch der relativ einfachere Charakter des Integralkurvensystems in der Nähe eines sog. Sattelpunktes, wo das System gestaltlich mit den Kurven

$$xy = C \tag{27}$$

übereinstimmt, darf uns keineswegs zu der Annahme verleiten,

*) *Liouville*'s Journ., Sér. 3, t. VII.

dass dort die Integralfläche etwa einen Sattelpunkt im gewöhnlichen Sinne aufweise. Es ergibt sich dies schon daraus, dass eine Zuordnung der Integralkurvenzweige, die der Zusammengehörigkeit je zweier Hyperbeläste in (27) entspräche, im allgemeinen Falle nicht vorhanden zu sein braucht.

Wenn die erste der Relationen (15) für einen Punkt der y-Axe erfüllt ist, ohne dass gleichzeitig $\mu_0 = 0$, d. h. wenn ein Nullpunkt der Funktion $\frac{d\varphi}{dy}$ vorliegt, der nicht mit einem der Punkte $y^{(i)}$ zusammenfällt, so erkennt man, dass auch α_1 verschwinden muss, während die übrigen Coeffizienten wie gewöhnlich zu bestimmen sind. In der Entwickelung von ω verschwinden also die beiden ersten Glieder, d. h. es gehen durch den Punkt zwei Zweige von Integralkurven hindurch. Da dies aber, wie aus der Theorie der singulären Punkte bekannt ist, allgemein nur dann eintritt, wenn gleichzeitig $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$, so ist dieses Vorkommnis nur dadurch zu erklären, dass die beiden durch den Punkt gehenden Zweige zusammenfallen; ω wird also dann das vollständige Quadrat einer Potenzreihenentwickelung nach x und y. Da ausserdem wegen $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ die Tangentenebene der Integralfläche horizontal wird, so erkennen wir, dass unsere Fläche längs der durch diesen Punkt laufenden Charakteristik von einer Horizontalebene berührt wird.

Die Theorie des Multiplikators führt zu demselben Ergebnis. Man hat ja für den Multiplikator M die Gleichungen:

$$MX \equiv \frac{\partial \omega}{\partial y}; \quad -MY \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Wir deuten durch den Index $_0$ an, dass in dem betreffenden Ausdrucke $x = 0$ gesetzt ist. Hat man dann für einen Punkt der y-Axe

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

ohne dass

$$X_0 = 0,$$

so muss M_0 für diesen Punkt verschwinden. Da nun aber $M = 0$ eine Partikularlösung von (5) darstellt, so erkennt man, dass durch den betrachteten Punkt eine Charakteristik hindurchgeht, längs welcher, wie obige Beziehungen lehren, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ und $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ konstant verschwinden.*)

§ 4. Mehrblättrige Flächen.

Das am Schlusse des ersten Paragraphen erörterte Verhalten der Integralfläche an den Stellen, die wir damals mit $0, y^{(i)}$ bezeichneten, legt uns die Frage nahe, wie man das zweite Blatt, das an einer solchen Stelle mit dem zunächst gegebenen zusammenhängt, analytisch wirklich bestimmen könne. Der früher aufgewiesene Zusammenhang unserer Betrachtungen mit dem Ansatz (20) pag. 10 macht besonders deutlich, welche Stellung eine solche Untersuchung innerhalb der Theorie der durch eine Differentialgleichung definierten Funktionen einnimmt; sie soll dazu dienen, für diejenigen Divergenzstellen, wo y_0' unendlich ist, das Verhalten der Integralfunktion (20) zu kennzeichnen und in gewissem Sinne eine analytische Fortsetzung derselben zu liefern, bedeutet

*) Es ist dies eine der Kurven, längs welcher die Entfernung δs zwischen zwei benachbarten Integralkurven nicht etwa verschwindet, sondern unendlich gross wird. Vergl. *Lie* a. a. O. Kap. 9, § 1. Die Bedingung $\frac{1}{\mu} = 0$ oder $\delta s = 0$ führt zu der Besonderheit, dass längs eines Teils der parabolischen Kurve der Integralfläche die Tangentenebene vertikal steht. Wegen $\frac{1}{\mu} = 0$ besteht dann die Horizontalprojektion dieses Teils wiederum aus Integralkurven. Diese Bemerkung verdanke ich Hrn. *Kleiber*.

mithin einen ersten Schritt in Richtung der Aufgabe, über das geometrische und funktionentheoretische Verhalten einer solchen Funktion etwas allgemeines auszusagen.

Es erhebt sich ausserdem die Frage, wie man für eine endliche Anzahl q dieser Punkte $y^{(i)}$ die entstehende, eventuell $q+1$ blätterige Fläche durch eine in C bis zum Grade $q+1$ ansteigende Gleichung:

$$f(x, y, C) = 0 \tag{28}$$

darzustellen habe.

Um zunächst für das erste dieser Probleme einen Ansatz zu gewinnen, denken wir uns im Nullpunkt die Gleichung (18) pag. 10 erfüllt und

$$\varphi \equiv \gamma_1 y + \tfrac{1}{2}\gamma_2 y^2 + \tfrac{1}{6}\gamma_3 y^3 + \dots \tag{29}$$

willkürlich vorgelegt. Es handelt sich darum, den zweiten, durch den Nullpunkt gehenden Zweig φ_1 der Kurve, in der die yz-Ebene die Integralfläche schneidet, nach steigenden Potenzen von y zu entwickeln.

Sei nun

$$\psi \equiv \beta_1 y + \tfrac{1}{2}\beta_2 y^2 + \tfrac{1}{6}\beta_3 y^3 + \dots \tag{30}$$

eine Funktion, deren Coeffizienten den Relationen (25) genügen; berechnen wir das allgemeine Integral (9) nach Einsetzung dieser β_i mit Hülfe von (10), so zeigt es in der Nähe des Nullpunktes keinerlei Verzweigung.

Ist nun 0, y_1 ein in der Nähe des Anfangspunktes gelegener Punkt der y-Axe, so lautet die Gleichung der durch diesen Punkt gehenden Integralkurve:

$$\beta_1 y_1 + \tfrac{1}{2}\beta_2 y_1{}^2 + \dots$$
$$= \beta_1 y + \tfrac{1}{2}\beta_2 y^2 + \dots + \alpha_1 y + \tfrac{1}{2}(2\alpha_{12} x y + \alpha_{11} x^2) + \dots$$

Setzen wir hierin $x = 0$, so folgt:

$$\beta_1 y_1 + \tfrac{1}{2}\beta_2 y_1{}^2 + \dots = \beta_1 y + \tfrac{1}{2}\beta_2 y^2 + \dots$$

Dividieren wir nach Hinüberschaffung der rechten Seite auf die linke das Ganze durch $y_1 - y$, so kommt

$$\beta_1 + \tfrac{1}{2}\beta_2(y + y_1) + \tfrac{1}{6}\beta_3(y^2 + yy_1 + y_1^2) + \cdots = 0. \quad (31)$$

Aus dieser Gleichung können wir die Ordinate y_2 des zweiten in der Nähe des Nullpunktes liegenden Schnittpunktes unserer Integralkurve mit der y-Axe in vollkommen eindeutiger Weise dadurch berechnen, dass wir aus (31) y nach Potenzen von y_1 entwickeln, und beachten, dass y_2 für $y_1 = 0$ wegen $\beta_1 = 0$ gleichfalls verschwindet. Die entstehende Formel für y_2 ist, wie eine einfache Rechnung lehrt, von den vermöge (25) noch willkürlichen Coeffizienten β_i vollkommen unabhängig, indem die in die Entwickelung von y_2 eingehenden β-Combinationen mit Hülfe eben dieser Relationen durch bekannte Grössen und das Verhältnis $\frac{\beta_3}{\beta_2}$, und dieses schliesslich selbst durch bekannte Grössen ausdrückbar sind. Man könnte auch umgekehrt von hier aus zur Aufstellung der Relationen (25) gelangen, indem man die Bedingungen für die Existenz einer nur von den Constanten der Differentialgleichung abhängenden Relation zwischen y_2 und y_1 untersucht. Da übrigens die Existenz dieser Relation geometrisch nahezu selbstverständlich ist, so wollen wir uns mit dem Beweise unserer Behauptung nicht weiter aufhalten. Wir setzen demgemäss:

$$y_2 = \tau_1 y_1 + \tfrac{1}{2}\tau_2 y_1^2 + \tfrac{1}{6}\tau_3 y_1^3 + \cdots, \quad (32)$$

worin die τ_i bekannte, d. h. von den Coeffizienten $\lambda_{ik}\ldots$, $\mu_{ik}\ldots$ abhängende Grössen vorstellen.

Nun ist der gesuchte zweite Zweig φ_1 von φ offenbar dadurch charakterisiert, dass

$$\varphi_1(y_2) \equiv \varphi(y_1). \quad (33)$$

Setzen wir

$$\varphi_1 \equiv \delta_1 y + \tfrac{1}{2}\delta_2 y^2 + \cdots, \quad (34)$$

so ergeben sich die zur vollständigen und eindeutigen Bestimmung der δ_i nötigen Relationen aus der Identität (33), wenn man darin für φ, φ_i und y_2 resp. ihre Entwickelungen (29), (34) und (32) substituiert und die Coeffizienten gleich hoher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten vergleicht. Unsere erste Aufgabe ist damit gelöst.

Bezüglich der Reihenentwickelung (34) müssen wir aufs Neue hervorheben, dass dieselbe zwar für ein endliches Stück der y-Axe sicher konvergiert, dass sich aber selbst innerhalb des der Betrachtung zu Grunde liegenden Bereichs über die Gültigkeit einer solchen Entwickelung nur nach voraufgehender gestaltlicher Diskussion unserer Integralkurven etwas bestimmtes aussagen lässt.

Betrachten wir z. B. den Fall, der durch Fig. 1 dargestellt wird, so erkennen wir unmittelbar, dass die für die Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ gebildeten Entwickelungen φ_1 und φ_2 an den mit A und B bezeichneten Punkten der y-Axe aufhören, gültig zu sein.

In solchen einfachsten Fällen ist die zweite der zu Anfang dieses Paragraphen aufgeworfenen Fragen leicht zu erledigen.

Seien also innerhalb unseres Bereiches q Punkte 0, $y^{(i)}$ auf der y-Axe vorhanden, welche zu $q+1$ Blättern der Integralfläche Veranlassung geben mögen. Sei dann für jeden dieser Punkte der entsprechende Zweig φ_i in der soeben auseinandergesetzten Weise bestimmt, so denken wir uns alle diese φ nach Potenzen von $y - b$ entwickelt; b soll dabei keiner der Relationen:

$$\beta_1 y^{(i)} + \tfrac{1}{2}\beta_2 y^{(i)2} + \ldots = \beta_1 b + \tfrac{1}{2}\beta_2 b^2 + \ldots$$

genügen, d. h. der Punkt 0, b soll weder mit einem der Punkte $y^{(i)}$, noch auch mit einem solchen Punkt zusammenfallen, in dem eine die y-Axe berührende Integralkurve diese

Axe weiterhin schneidet. Wir erkannten ja an Fig. 1, dass an solchen Stellen jedesmal für zwei der φ_i eine Verzweigung eintritt.

Die erwähnten Entwickelungen seien:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \delta_k^{(i)} (y-b)^k \qquad (i = 1, 2 \ldots q) \\ \varphi &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \delta_k (y-b)^k \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Für jeden dieser Zweige φ_i ergibt sich aus (10) eine Entwickelung des entsprechenden Zweiges der Integralfläche:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i &= C_i + \alpha_1^{(i)} x + \delta_1^{(i)} (y-b) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} [\alpha_{11}^{(i)} x^2 + 2 \alpha_{12}^{(i)} x (y-b) + \delta_2^{(i)} (y-b)^2] \ldots \\ \omega &= C_{q+1} + \alpha_1 x + \delta_1 (y-b) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Wir setzen ferner die gesuchte Integralgleichung in der Form voraus:

$$\psi + \psi^{(1)} C + \psi^{(1)} C^2 + \ldots + \psi^{(q)} C^q + C^{q+1} = 0 = F. \tag{37}$$

Dabei sei:

$$\psi \equiv \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 (y-b) + \tfrac{1}{2} (\psi_{11} x^2 + \ldots) + \ldots$$

$$\psi^{(\lambda)} \equiv \psi_0^{(\lambda)} + \psi_1^{(\lambda)} x + \ldots$$

Die Anfangswerte ψ_0, $\psi_0^{(\lambda)}$ sind durch die Bemerkung bestimmt, dass die Wurzeln $C_1, C_2 \ldots C_{q+1}$ der Gleichung

$$\psi_0 + \psi_0^{(1)} C + \psi_0^{(2)} C^2 + \ldots + \psi_0^{(q)} C^q + C^{q+1} = 0$$

resp. mit den Werten übereinstimmen sollen, welche die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q, \varphi$ für $y = b$ annehmen.

Wir entwickeln jetzt die Grösse C aus (37) mit Hülfe der *Taylor*schen Reihe nach Potenzen von x und $y-b$; es ist dies möglich, da nach unseren Voraussetzungen über den Punkt 0, b die Anfangswerte $C_1, C_2 \ldots C_{q+1}$ alle verschieden sind.

Bezeichnen wir jetzt den Wert von $\frac{\partial F}{\partial C}$, wenn darin $x = 0$, $y = b$, $C = C_i$ gesetzt wird, mit σ_i, ebenso den entsprechenden Wert von $\frac{\partial^2 F}{\partial C^2}$ mit σ_i', so folgt:

$$
\begin{aligned}
-C = -C_i &+ \frac{1}{\sigma_i}(\psi_1^{(q)} C_i^q + \psi_1^{(q-1)} C_i^{q-1} + \ldots + \psi_1^{(1)} C_i + \psi_1)\, x \\
&+ \frac{1}{\sigma_i}(\psi_2^{(q)} C_i^q + \ldots \qquad\qquad + \psi_2)(y-b) \\
&+ \frac{1}{2\sigma_i^3}[\sigma_i^2(\psi_{11}^{(q)} C_i^q + \ldots + \psi_{11}^{(1)} C_i + \psi_{11}) - \\
&\quad - 2\sigma_i (q\, \psi_1^{(q)} C_i^{q-1} + \\
&\quad + \overline{q+1}\, \psi_1^{(q-1)} C_i^{q-2} + \ldots)(\psi_1^{(q)} C_i^{(q)} + \ldots \psi_1) + \\
&\quad + \sigma_i'(\psi_1^{(q)} C_i^q + \ldots + \psi_1)^2]\, x^2 + \\
&+ \frac{1}{\sigma_i^3}[\sigma_i^2(\psi_{12}^{(q)} C_i^q + \ldots + \psi_{12}^{(1)} C_i + \psi_{12}) \ldots]\, x(y-b) \\
&+ \frac{1}{2\sigma_i^3}[\sigma_i^2(\psi_{22}^{(q)} C_i^q + \ldots + \psi_{22}) \ldots](y-b)^2 \\
&+ \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \quad (38)
\end{aligned}
$$

$(i = 1, 2 \ldots q+1)$.

Durch Identifizierung dieser Formeln mit den entsprechenden Entwickelungen (36) erhalten wir dann die nötigen Gleichungen zur Berechnung der $\psi_{ik}^{(\lambda)} \ldots$ und $\psi_{ik} \ldots$ Man sieht zugleich, dass diese Berechnung sich auf linearem Wege ausführen lässt. Dadurch haben wir erreicht, dass die $q+1$ Werte der Constanten, durch welche je ein und dieselbe Integralkurve in dem betrachteten Ebenenstück charakterisiert wird, für jeden in Frage kommenden Punkt durch eine einzige algebraische Gleichung geliefert wird.

Nachdem wir in § 3 ein Mittel zur Bestimmung einer einblätterigen Integralfläche kennen gelernt haben, erscheint es vielleicht überflüssig, sich mit dem komplizierteren Falle

von $q + 1$ Blättern zu beschäftigen Es sei jedoch hervorgehoben, dass wir in den Coefficienten ϕ, $\phi^{(\lambda)}$ der Gleichung (37) eindeutige Funktionen einer und derselben ω-Funktion vor uns haben, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese Bemerkung dazu dienen kann, eine einfachste Form des Integrals noch genauer zu kennzeichnen, als dies durch die Relationen (25) geschehen ist. Wir wollen diese Bemerkung indes nicht weiter verfolgen.

II. Kapitel.

§ 1. Einleitende Bemerkungen über die infinitesimale Transformation.

Die ausführliche Darstellung im vorigen Kapitel erlaubt uns, die analogen Entwickelungen für die infinitesimale Transformation bedeutend kürzer zu fassen. Doch müssen wir bezüglich der dabei zur Verwendung kommenden Grundvorstellungen einige Bemerkungen vorausschicken.

Ist ω eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (8), pag. 7, ferner

$$\mathrm{U f} = \xi \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} + \eta \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \qquad (39)$$

eine zu (5) gehörige infinitesimale Transformation, so ist bekanntlich*) jede andere infinitesimale Transformation derselben Gleichung in der Form darstellbar:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \mathrm{F}(\omega)(\xi + \rho \mathrm{X}) \\ \eta' &= \mathrm{F}(\omega)(\eta + \rho \mathrm{Y}). \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

F ist hiebei eine willkürliche Funktion von ω, ρ eine willkürliche Funktion der beiden Variabeln x und y.

---

*) Vgl. *S. Lie*, a. a. O., Kap. 7 § 1.

Wenn wir, wie in der Einleitung, das System der Bahnkurven unserer infinitesimalen Transformation ξ', η' willkürlich annehmen, so dass etwa

$$\eta' = \xi' \zeta', \tag{41}$$

so folgt aus (40):

$$-\rho = \frac{\eta - \xi \zeta'}{X \zeta' - Y},$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= F(\omega)\left(\xi + \frac{\eta - \xi \zeta'}{Y \xi' - X} X\right) \\ \eta' &= F(\omega)\left(\eta + \frac{\eta - \xi \zeta'}{Y \zeta' - X} Y\right). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Diese Formeln liefern die zu irgend einem System von Bahnkurven gehörigen infinitesimalen Transformationen, wenn eine infinitesimale Transformation ξ, η bekannt ist.

Um auch noch die Bedeutung der in (42) auftretenden willkürlichen Funktion $F(\omega)$ einzusehen, bemerken wir folgendes:

Man kann ξ und η auch dadurch definieren, dass der Ausdruck

$$\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

eine Funktion von ω allein sein soll. Wenn nun ξ und η die Gleichung

$$\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial y} = 1 \tag{43}$$

befriedigen, so ergibt sich:

$$\xi' \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta' \frac{\partial \omega}{\partial y} = F(\omega).$$

Setzen wir also die rechtsstehende Funktion F fest, so geht durch unsere infinitesimale Transformation die Kurve

$$\omega = C$$

über in

$$\omega = C + F(C)\,\delta t. \qquad \textbf{(44)}$$

Es ist leicht zu sehen, dass das Gesetz (44), nach welchem die Integralkurven aufeinanderfolgen, von der Art, in welcher (7) geschrieben ist, also von der Wahl der im vorigen Kapitel betrachteten Funktion φ ganz unabhängig ist.

Da nun ξ und η der Gleichung:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial x} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2\right] \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad \textbf{(45)}$$

genügen (wobei $f[xyy'] = 0$ die vorgelegte Differentialgleichung bedeutet), so sehen wir:

Um das Problem der Auffindung einer infinitesimalen Transformation zu einem völlig bestimmten zu machen, genügt es, die Bahnkurven willkürlich anzunehmen und die Integralkurven unserer Differentialgleichung nach einem gewissen Gesetze (44) aneinanderzureihen. Die erstere Festsetzung lässt ξ als Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\xi \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \zeta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y' \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right] + (\zeta - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$
$$+ y'(\zeta - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(46)}$$

erscheinen, die zweite liefert die Bestimmung einer Integralfläche derselben nach dem nämlichen Prinzip, das auch in § 1 des ersten Kapitels benutzt ward, wie man leicht folgendermassen erkennt:

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, können wir das y_0 der Formel (20) pag. 10 als Integrationskonstante wählen. Setzen wir $x_0 = 0$ und nehmen an, dass durch Anwendung von Uf die Kurve

$$\omega = y_0$$

übergehe in

$$\omega = y_0 + F(y_0)\,dt.$$

Seien nun in Fig. 3 $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ zwei benachbarte Integralkurven, $A_1 B_2$ eine Bahnkurve unserer infinitesimalen Transformation, so ist

$$A_1 A_2 = F(y_0)\,\delta t,$$

$$\cot \sphericalangle Y A_2 B_2 = y_0', \quad \operatorname{tg} \sphericalangle B_2 A_1 C = \zeta_0,$$

$$\xi \delta t = A_1 C = A_1 B_2 \cos B_2 A_1 C$$

oder

$$\xi = F(y_0) . \frac{\sin B_2 A_2 A_1}{\sin A_2 B_2 A_1} \cos B_2 A_1 C;$$

die trigonometrischen Funktionen lassen sich leicht durch ξ_0 und y'_0 ausdrücken.

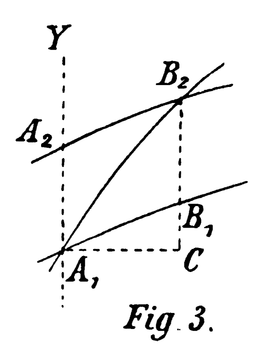


Fig. 3.

Die Funktion, auf welche sich ξ längs der y-Axe reduziert, kann mithin wegen der Unbestimmtheit von F ebenfalls willkürlich gewählt werden. Wir wollen an dieser Bestimmungsart auch im Folgenden festhalten, also eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung dadurch herstellen, dass wir die Charakteristiken derselben durch eine in der $y\xi$-Ebene willkürlich gewählte Kurve hindurchlegen. Diese Charakteristiken werden durch das simultane System:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = -\frac{(\zeta - y')\frac{\partial F}{\partial y'} d\xi}{\xi\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \zeta\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y'\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right]} \tag{47}$$

definiert und bilden demnach ein System von ∞^2 Raumkurven, die sich auf der xy-Ebene in die ∞^1 Raumkurven der vorgelegten Differentialgleichung $F(xyy') = 0$ projizieren.

Ist nun eine dieser letzteren Kurven geschlossen, und denken wir uns dieselbe als Basis eines auf der xy-Ebene senkrecht stehenden Cylinders, so ist der Fall denkbar, dass die auf diesem Cylinder verlaufenden Charakteristiken der infinitesimalen Transformation sich entweder überhaupt nicht oder erst nach mehreren Umläufen schliessen. Zur Aufklärung dieser Frage haben wir uns daran zu erinnern, dass die geschlossenen Integralkurven je nach der Beschaffenheit der Nachbarkurven in zwei Kategorien zerfallen: Seien erstlich die Nachbarkurven auch geschlossen, so erkennt man leicht geometrisch, dass bei eindeutigem ζ die Charakteristiken sich nach einem Umlauf um den Cylinder, eventuell nach zwei oder mehreren Durchgängen durch's Unendliche, schliessen müssen. Ist zweitens die geschlossene Kurve ein sog. Grenzzyklus, so zeigt eine einfache Überlegung, dass die Charakteristiken sich schraubenförmig um den Cylinder herumwinden, so zwar, dass sich die Windungen gegen die xy-Ebene zu asymptotisch verdichten. Diese Vorkommnisse lassen wir, den in der Einleitung gemachten Bemerkungen entsprechend, ausser Acht.

---

§ 2. Die Fläche der infinitesimalen Transformation.

Wenn die Differentialgleichung

$$y' = \frac{Y}{X} \tag{48}$$

gegeben ist, so lässt sich die Gleichung (45) mit Benutzung der Symbole:

$$\left.\begin{aligned} Uf &= \xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y} \\ Af &= X\frac{\partial f}{\partial y}+Y\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

auch so schreiben:

$$\frac{UX-A\xi}{X}=\frac{UY-A\eta}{Y}.$$

oder ausgerechnet:

$$\xi\left(Y\frac{\partial X}{\partial x}-X\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+\eta\left(Y\frac{\partial X}{\partial y}-X\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-XY\frac{\partial \xi}{\partial x}$$
$$-Y^2\frac{\partial \xi}{\partial y}+X^2\frac{\partial \eta}{\partial x}+XY\frac{\partial \eta}{\partial y}=0. \tag{50}$$

Wir legen unserer Untersuchung wiederum ein Gebiet der Ebene zu grunde, wie es am Schlusse der Einleitung des Näheren charakterisiert ist und setzen $\eta=\xi\zeta$, wo ζ in dem betrachteten Bereiche eindeutig und in der Form

$$\zeta=\zeta_0+\zeta_1 x+\zeta_2 y+\tfrac{1}{2}(\zeta_{11}x^2+\ldots) \tag{51}$$

darstellbar ist; ferner sei:

$$\xi=\xi_0+\xi_1 x+\xi_2 y+\ldots \tag{52}$$

Substituiert man diese Werte, sowie die in (6) gegebenen Entwickelungen für X und Y in (50), so erhält man Relationen zwischen den $\xi_{ik}\ldots$, $\zeta_{ik}\ldots$, $\mu_{ik}\ldots$, $\lambda_{ik}\ldots$, welche von den Coeffizienten $\xi_{ik}\ldots$ der xy-Combinationen bis zum nten Grade einschliesslich genau n willkürlich lassen. Die Funktion ξ enthält also noch, wie es sein muss, die Coeffizienten einer willkürlichen Funktion einer Variabeln. Da die gedachten Relationen den früheren Gleichungen (10) ganz analog, aber höchst weitläufig ausfallen, so unterlassen wir die Aufstellung derselben. Wir zitieren sie vielmehr kurz unter der Bezeich-

nung (10a), und beschränken uns darauf, die innersten Kapitel aus (10) gezogenen Schlüsse für unseren Fall kurz zu wiederholen.

Setzen wir fest, dass sich ξ für $x = 0$ auf eine eindeutige Funktion ψ reduziere, die in Form einer überall konvergenten Potenzreihe

$$\psi = \xi_0 + \sigma_1 y + \tfrac{1}{2}\sigma_2 y^2 + \cdots \tag{53}$$

gegeben sei, so wird die Fläche der infinitesimalen Transformation an einer Stelle 0, $y^{(k)}$, für die

$$\mu_0^{(k)} = 0, \quad \lambda_0^{(k)} \neq 0, \tag{54}$$

wiederum eine Verzweigung aufweisen. Wie früher zeigt man, dass die durch einen solchen Punkt 0, $y^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ hindurchgehende Charakteristik eine Umrisskurve der Fläche ist. Soll eine derartige Verzweigung vermieden werden, so müssen die Coeffizienten von ψ gewissen Relationen genügen, die den Gleichungen (25) analog gebaut sind, und die wir aus diesem Grunde mit (25a) bezeichnen wollen. Wir bemerken, dass der Anfangswert ξ_0 natürlich auch unter der Annahme $\mu_0 = 0$ willkürlich bleibt, aber in die Relationen (25a) eingeht. Diese Bemerkung ist für das folgende von Wichtigkeit.

Das Verfahren zur Bestimmung des zweiten Zweiges der Kurve, welche die yz-Ebene auf unserer ξ-Fläche ausschneidet, erleidet hier eine Modifikation, die wir kurz skizzieren wollen.

Nehmen wir wiederum an, dass $\mu_0 = 0$, sowie dass y_0 und y_1 dieselbe Bedeutung haben, wie in § 4 des ersten Kapitels, so besteht zwischen y_2 und y_1 die Gleichung (32):

$$y_2 = \tau_1 y_1 + \cdots, \tag{32}$$

die wir kürzer so schreiben:

$$y_2 = \chi(y_1). \tag{32}$$

Sei wiederum

$$\varphi = \beta_1 y + \tfrac{1}{2}\beta_2 y^2 + \cdots \tag{55}$$

eine Funktion, deren Coeffizienten den Relationen (25) genügen, und sei das Integral

$$\omega(x, y) = C \tag{56}$$

unserer Differentialgleichung mit Hülfe dieser β_r berechnet. Sei ferner

$$\vartheta(y) = \vartheta_0 + \vartheta_1 y + \dots \tag{57}$$

eine Funktion, deren Coeffizienten den Relationen (25a) genügen, und sei ξ mit Hülfe dieser Funktion aus (50) in der Form berechnet:

$$\xi = \xi_0 + \vartheta(y) + \overline{\xi}_1 x + \tfrac{1}{2}(\overline{\xi}_{11} x^2 + 2\overline{\xi}_{12} xy) + \dots \tag{58}$$

Man habe auch

$$C = \omega = \varphi(y) + \alpha_1 x + \dots \tag{59}$$

Alle Charakteristiken der infinitesimalen Transformation, welche durch die in der Nähe der z-Axe gelegenen Punkte $0, y_1, \xi_1$ hindurchgehen, weisen auf der entgegengesetzten Seite dieser Axe einen weiteren Schnittpunkt $0, y_2, \xi_2$ mit der yz-Ebene auf. Wegen der Willkürlichkeit von ξ_0 stellt nun (58) ein System von ∞^1 Flächen dar, welche sich alle an der z-Axe ganz regulär verhalten und in Verbindung mit (56) alle Charakteristiken liefern. Um die Gleichungen der durch $0, y_1, \xi_1$ gehenden Charakteristik zu erhalten, setzen wir

$$C = \varphi(y_1), \tag{60}$$

$$\xi_0 = \xi_1 - \vartheta(y_1). \tag{61}$$

Da aber, wie oben bemerkt, die Relationen (25a) ξ_0 enthalten, so geht in die Coeffizienten $\vartheta_1, \overline{\xi}_{ik} \dots$ von (58) ξ_0 ein. Berechnen wir also aus (61) ξ_0, so erhalten wir eine Relation der Form

$$\xi_0 = \lambda(\xi_1, y_1), \tag{62}$$

wo λ eine Entwickelung nach Potenzen von y_1 und ξ_1 darstellt, die nur von den Constanten der Differentialgleichung und den genannten Variabeln abhängt. Substituiert man den

Wert von ξ_0 in (58) und setzt darin zugleich für y den Wert

$$y_2 = \chi(y_1), \tag{63}$$

so hat man ξ_2 statt ξ zu schreiben, und erhält etwa:

$$\xi_2 = \Phi(\xi_1, y_1). \tag{64}$$

Wir schreiben in (53) für ξ_0, das wir bisher als willkürliche Constante behandelten, der besseren Unterscheidung halber $\bar{\xi}_0$; ist jetzt:

$$\psi' \equiv \bar{\xi}_0 + \rho_1 y + \tfrac{1}{2}\rho_2 y^2 + \cdots$$

der gesuchte zweite Zweig der Schnittkurve in der y z-Ebene, so führen die Beziehungen

$$\varphi(y_1) = \xi_1,$$

$$\psi(y_2) = \xi_2$$

zu der Identität:

$$\psi[\chi(y_1)] = \Phi[\varphi(y_1), y_2],$$

aus welcher durch Vergleichung der Coeffizienten gleicher Potenzen von y_1 auf beiden Seiten die zur Bestimmung der ρ_i nötigen Beziehungen sich ergeben. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die wirkliche Ausführung solcher Rechnungen von grösster Weitläufigkeit sein würde.

Die im vorigen Kapitel über ein- und mehrblätterige Integralflächen gemachten Bemerkungen lassen sich nunmehr fast wörtlich auf unsern Fall übertragen.

Wir erwähnen noch, dass ein Unendlichwerden der Funktion ζ eine Verzweigung der ξ-Fläche, allgemein zu reden, nicht herbeiführt, vielmehr nur das Verschwinden der Funktion ξ zur Folge hat.

---

§ 3. Unendlichwerden der Funktion ξ.

Da die nachfolgende Bemerkung für Differentialgleichungen höherer Grade ebenso gilt wie für die des ersten Grades, so wollen wir die vorgelegte Differentialgleichung in der Form (1) pag. 3 voraussetzen. Um das der partiellen Differentialgleichung (46) äquivalente simultane System (47) zu integrieren, suchen wir das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'}, \tag{65}$$

d. h. von (1); sei dasselbe in der Form

$$\varphi(x, y, C) = 0 \tag{66}$$

gefunden worden, so entnehmen wir hieraus y und substituieren dessen Ausdruck in x und C in die Gleichung:

$$\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \zeta\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y'\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)}{(\zeta - y')\frac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{67}$$

ξ ergibt sich hieraus durch eine Quadratur. Nach Ausführung derselben hat man C mit Hülfe von (66) wiederum durch seinen Ausdruck in x und y zu ersetzen.

Die Gleichung (67) gibt nun zu folgenden Reduktionen Anlass: Es ist

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = -\frac{\partial y'}{\partial x}; \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = -\frac{\partial y'}{\partial y};$$

also:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \zeta\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y'\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = -(\xi - y')\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{d}{dx}(\zeta - y')$$

oder

$$\xi = \frac{1}{\zeta - y'} e^{\int \frac{\partial y'}{\partial y} dx} \qquad (68)$$

Es sei hervorgehoben, dass diese Formel von der ähnlichen, aus der Theorie des Multiplikators bekannten nicht wesentlich verschieden ist.

Da in (68) der zweite Faktor der rechten Seite von ζ ganz unabhängig ist, so erkennt man, dass ξ an einer Stelle, für welche

$$\zeta = y'$$

unendlich wird und beim Fortschreiten längs einer Bahnkurve vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht. Die Kurve

$$F(x, y, \zeta) = 0$$

bildet also in jedem ihrer Punkte die Grenze zwischen zwei Gebieten der Ebene, die sich durch den Sinn der infinitesimalen Transformation unterscheiden. Nur an den Stellen, für welche ausserdem noch

$$\frac{d\xi}{dx} = y'',$$

findet ein solcher Zeichenwechsel nicht statt.

Wenn wir jetzt wieder zu unserer Differentialgleichung ersten Grades (5) zurückkehren, und eine Fläche der infinitesimalen Transformation nach der Methode des vorigen Paragraphen mit Hülfe einer willkürlichen Funktion ψ bestimmt denken, so fragt es sich, wie sich diese Fläche an einem der Punkte verhält, wo die y-Axe die Kurve

$$X\zeta - Y = 0 \qquad (69)$$

schneidet, wo also $\psi(y)$ im allgemeinen natürlich einen endlichen Wert annimmt.

Wir beantworten diese Frage durch Betrachtung eines besonders einfachen Falles, der aber für dieses Vorkommnis typisch ist.

Das System der Integralkurven seien die Parallelen zur x-Axe, die Bahnkurven die konzentrischen Kreise um den Nullpunkt. Dann werden die Gleichungen (5) und (47):

$$y' = 0,$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{d\xi\left(-\frac{x}{y}\right)}{\xi\left(-\frac{1}{y}\right)}.$$

Die Integration ergibt:

$$y = \text{const.},$$
$$x\xi = \text{const.}$$

Die Charakteristiken der infinitesimalen Transformation sind also hier die gleichseitigen Hyperbeln, die in den Parallelebenen zur yz-Ebene liegen und deren Schnittlinien mit den beiden andern Coordinatenebenen zu Asymptoten haben. Wir verlangen, dass ξ längs irgend einer Geraden der xy-Ebene, die wir mit L bezeichnen, und die weder durch den Nullpunkt noch zu einer der Coordinatenaxen parallel laufe, einen konstanten Wert a besitze. Ist A der Punkt, wo L die y-Axe schneidet, so enthält die entstehende ξ-Fläche die durch A gehende Vertikalgerade, wie auch die durch A gehende x-Parallele. Die Ebene der beiden Geraden ist also Tangentenebene der Fläche. Im Übrigen zeigt letztere in dem betrachteten Punkte keine Besonderheit.

Allgemein ergibt sich folgendes Resultat:

An einer Stelle der y-Axe, für welche $\zeta = y'$, φ aber endlich ist, enthält die Fläche der infinitesimalen Transformation die Gerade, die in A auf der xy-Ebene senkrecht steht,

und die durch A gehende Integralkurve der Differential-gleichung, längs einer solchen Integralkurve [illegible] [illegible]. Betrachtet man die in [illegible] [illegible] Grösse [illegible] als sehr klein, aber endlich, so erkennt man in der That an einer Figur leicht, dass durch Annahme eines endlichen [illegible] für einen Punkt der Kurve [illegible] zwei Integralkurven einander unendlich nahe gerückt werden.

III. Kapitel.

§ 1. Fläche des Integrals für Differentialgleichungen höheren Grades.

Wenn wir versuchen, unsere Betrachtungen auf Differentialgleichungen höherer Grade auszudehnen, müssen wir zuvörderst für die Verzweigungen der Integralfläche eine wichtige Fallunterscheidung treffen. Die früher untersuchten Verzweigungen dieser Fläche (vergl. § 2) entstanden durch die vollkommen willkürliche Annahme der „Anfangsfunktion φ“ und konnten dementsprechend durch besondere Festsetzungen über die letztere beseitigt werden. Im Falle einer Differentialgleichung n ten Grades dagegen:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{70}$$

laufen durch jeden Punkt der Ebene n im allgemeinen verschiedene Integralkurven hindurch, die also in der Darstellung

$$f(x, y, C) = 0 \tag{71}$$

des allgemeinen Integrals von (70) auch durch n verschiedene Werte der Constanten C charakterisiert sein werden. Fassen wir daher C in (71) als dritte Raumcoordinate des rechtwinkeligen Systems x, y, z, so werden wir die Fläche

$$f(x, y, z) = 0 \tag{71 a}$$

wenigstens als n-blätterig vorauszusetzen haben. Wir werden

die hierdurch bedingte Verzweigung der Integralfläche als wesentliche bezeichnen, im Gegensatz zu den sogleich zu besprechenden zweierlei Arten des ausserwesentlichen oder accessorischen Blätterzusammenhangs.

Schreiben wir unsere Differentialgleichung in der Form:

$$L y'^n + M_1 y'^{n-1} + M_2 y'^{n-2} + \ldots + M_n = 0, \qquad (72)$$

wo $L, M_1 \ldots$ ganze rationale Polynome in x und y bedeuten, multiplizieren dieselbe mit L^{n-1} und setzen $L y' = \vartheta$, so kann man aus der entstehenden Gleichung

$$\Phi = \vartheta^n + M_1 \vartheta^{n-1} + M_2^{(1)} \vartheta^{n-1} + \ldots M_n^{(1)} = 0 \qquad (73)$$

ϑ nach ganzen steigenden Potenzen von x und y entwickeln, also auch y' in der Form

$$L y' = \vartheta_0 - \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \right)_0 x - \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \right)_0 y + \ldots$$

darstellen, wo ϑ_0 einen der Werte vorstellt, die sich für $x = y = 0$ aus der algebraischen Gleichung (73) berechnen lassen. Diese Reihe konvergiert jedenfalls innerhalb eines endlichen Bereiches, wenn sich der Nullpunkt in endlicher Entfernung von der Kurve befindet, deren Gleichung

$$\Delta = 0 \qquad (74)$$

sich durch Elimination von y' aus den beiden Gleichungen (72) und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (75)$$

ergibt. Man erkennt nunmehr sofort, dass alle Betrachtungen, welche wir in den ersten Paragraphen des I. Kapitels an das Verschwinden der Grösse $X_0 = 0$ knüpften, sich fast wörtlich auf den Fall $L_0 = 0$ übertragen lassen.

Diese Art der accessorischen Verzweigung wollen wir im Folgenden überall ausser Acht lassen, indem wir in (72) die Funktion L geradezu der Einheit gleich setzen. Überdies gestatten wir uns die Vereinfachung, den Grad der Differentialgleichung gleich 2 anzunehmen, legen also unsern Betrachtungen die Gleichung

$$y'^2 + My' + N = 0 \qquad (76)$$

zu Grunde, wenngleich manche der folgenden Ausführungen für Differentialgleichungen beliebigen Grades gültig sind. Die „Diskriminantenkurve"

$$\Delta \equiv M^2 - 4N = 0, \qquad (77)$$

im allgemeinen der Spitzenort der Integralkurven*), möge in Fig. 4 durch das Bogenstück AB dargestellt sein, auf dem

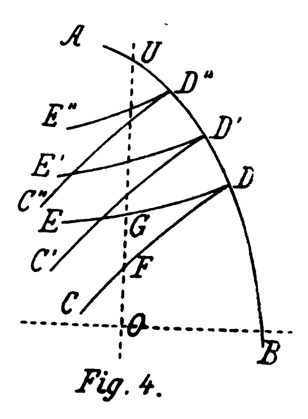


Fig. 4.

keine singuläre Stelle der Differentialgleichung gelegen sei. Die Bogenstücke CD, C'D'... mögen dann etwa dem ersten Zweige der durch (76) definierten algebraischen Funktion y' zugewiesen sein, die Stücke DE, D'E' dem zweiten. Der

*) Vgl. *Darboux*, Bulletin 1878.

Nullpunkt des Coordinatensystems werde in endlicher Entfernung von der Diskriminantenkurve angenommen. Dann können wir die beiden Zweige von y' nach Potenzreihen von x und y entwickeln; man habe etwa

$$y'_1 = \pi_1(x, y) = y'^{(1)}_0 + \lambda_1^{(1)} x + \lambda_2^{(1)} y + \ldots \quad (78)$$

$$y'_2 = \pi_2(x, y) = y'^{(2)}_0 + \lambda_1^{(2)} x + \lambda_2^{(2)} y + \ldots \quad (79)$$

Ordnen wir dann ∞^1 Charakteristiken der Differentialgleichung so zusammen, dass die nach CD, $C'D'$.. sich projizierenden Äste derselben durch die Punkte einer Kurve

$$x = 0, \quad z = \varphi(y) \quad (80)$$

hindurchlaufen, wo φ wiederum eindeutig und durch eine in dem betrachteten Bereiche konvergente Potenzreihe:

$$z = \varphi_0 + \varphi_1 y + \varphi_2 y^2 + \cdots \quad (80)$$

gegeben sei, so können wir das dadurch entstehende Blatt der Integralfläche mit Hülfe der Entwickelung (78) nach der bekannten Methode bestimmen. Dadurch ist aber gleichzeitig ein zweites Blatt dieser Fläche festgelegt, welches von den sich nach DE, $D'E'$.. projizierenden Ästen jener Charakteristiken beschrieben wird, mithin auch die Kurve

$$z = \psi(y), \quad (81)$$

welche von diesem Blatt aus der yz-Ebene ausgeschnitten wird. Sind wir im stande, analog zu den in § 4 durchgeführten Betrachtungen, die Relation

$$y_2 = \tau(y_1) \quad (82)$$

anzugeben, welche zwischen den Ordinaten y_1, y_2 je zweier auf einander folgender Schnittpunkte F, G der Integralkurven CDE.. mit der y-Axe besteht, so ergibt die Identität

$$\psi(y_2) \equiv \varphi(y_1) \equiv \psi[\tau(y_1)] \quad (83)$$

die nötigen Bestimmungsgleichungen für die Coeffizienten der Entwickelung ψ.

Verfolgen wir indes den Verlauf einer Integralkurve von (76) des Näheren, so zeigt sich, dass durch eine solche Aneinanderreihung der Charakteristiken die Integralfläche im allgemeinen keineswegs blos zweiblätterig ausfallen wird. Es ist vielmehr klar, dass sich die Frage nach der Blätterzahl wegen der grossen Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle nicht allgemein erledigen lässt. Daher erscheint es geboten, die nachfolgenden Untersuchungen an ein spezielles, besonders einfaches Beispiel zu knüpfen. Nehmen wir an, dass die Integralkurven wie in Fig. 5 verlaufen, so zwar, dass sie ober-

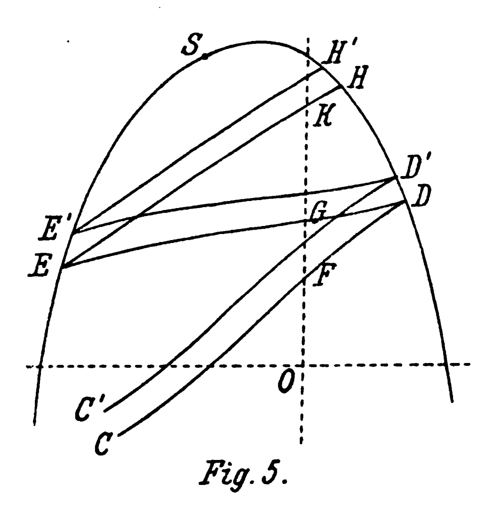


Fig. 5.

halb des Nullpunktes die y-Axe nur eine endliche Anzahl von Malen schneiden, dass also auf dieser Axe selbst keine singuläre Stelle vorhanden ist.*) Eine solche sei etwa bei S gelegen. Der Ast EH wird dann mit CD demselben Zweige von y′ zuzuordnen sein, und da φ im Schnittpunkte K jenes

*) Wegen des in der Fig. 5 dargestellten Falles vgl. *Dyck,* Sitzungsberichte der kgl. bayerischen Akademie der Wissensch. Bd. XXI, H. I.

Astes mit der y-Axe im allgemeinen nicht denselben Wert annimmt wie in F, so erhalten wir durch unsere Construktion noch ein drittes, eventuell viertes etc. Blatt der Integralfläche. Die so entstehenden Verzweigungen der Integralfläche wollen wir accessorische der II. Art nennen. In der That lassen sie sich vermeiden, wenn wir die analytische Beziehung

$$y_3 = \rho(y_1) \tag{84}$$

zwischen den Ordinaten y_3 und y_1 der Punkte K, F anzugeben vermögen. Wir brauchen dann blos der Funktion φ die Bedingung

$$\varphi(y_3) \equiv \varphi(y_1) \tag{85}$$

aufzuerlegen, um in ihr eine Anfangsfunktion zu besitzen, durch deren Zugrundelegung jene Verzweigung beseitigt wird, und zwar selbst unter der Annahme, dass die in Fig. 5 gezeichnete Charakteristik CDE.. die y-Axe oberhalb K noch mehrmals schneide, wie wir später nachweisen werden.

Man sieht, dass der Erfolg unserer Massnahmen wesentlich durch die Auffindung der Relationen (82) und (84) bedingt ist. Dass dieselben existieren, sowie dass sie analytischen Charakter haben und nur von den Constanten der Differentialgleichung abhängen können, ist geometrisch ebenso deutlich wie im Falle der Beziehung (32) pag. 21; wir wenden uns nunmehr zu ihrer Ableitung.

---

§ 2. Einführung der Fläche $F(x, y, y') = 0$.

Interpretieren wir in der Gleichung (72), pag. 43, y' als dritte Coordinate des rechtwinkeligen Systems x, y, z, so werden die verschiedenen Zweige der algebraischen Funktion y' durch die verschiedenen, oberhalb der xy-Ebene sich ausbreitenden Blätter der Fläche

$$F(x, y, z) = 0 \tag{86}$$

veranschaulicht. Indem wir dann jeden in der xy-Ebene verlaufenden Kurvenzug des Integralsystems auf das zugehörige Blatt der Fläche (86) vertikal projizieren, erhalten wir auf letzterer ein einfach überdeckendes Kurvensystem, das durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = z, \tag{87}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y}}{-\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ *)} \tag{88}$$

definiert wird. Längs der durch

$$\Delta = 0, \quad F = 0 \tag{89}$$

gegebenen Raumkurve besitzen alle Kurven dieses Systems vertikale Tangenten.

Eliminieren wir aus (86) und (88) die Variable y, so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$f\left(z, x, \frac{dz}{dx}\right) = 0, \tag{90}$$

welche die Projektionen jenes Kurvensystems auf die xz-Ebene definiert.

Wir fassen nun wieder die Differentialgleichung (76) sowie die in Fig. 4 dargestellte Orientierung der y-Axe ins Auge. Darüber hinaus treffen wir jedoch noch die vereinfachende Annahme, dass die Variable y für den in Betracht kommenden Teil der Ebene sich aus (76) nach ganzen steigenden Potenzen von x und z in der Form

$$y = \Omega(x, z) \tag{91}$$

---

*) Vgl. *Poincaré,* Liouville's Journal, sér. 4, t. I.

entwickeln lasse, oder, geometrisch ausgedrückt, dass in das Gebiet der xy-Ebene, für welches wir die nachfolgenden Betrachtungen durchführen wollen, sich kein Teil der Kurve vertikal projiziert, längs welcher die Fläche (86) zur y-Axe parallele Tangentenebenen besitzt. Unter dieser Voraussetzung ist es offenbar gestattet, die Gleichung (88) nach Ersetzung von y durch seinen Wert (91) wie eine Differentialgleichung ersten Grades zu behandeln. Wir schreiben sie in der Form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\lambda(x, z)}{\mu(x, z)}. \tag{92}$$

Seien jetzt $0, Y$ die Coordinaten des Punktes, wo die y-Axe die Kurve $\Delta = 0$ schneidet (U in Fig. 4), Z der (doppelt zählende) Wert von y', der sich für $x = 0$, $y = Y$ aus (76) ergibt. Es ist dann leicht zu sehen, dass das Integralkurvensystem von (92) in Bezug auf den Punkt $0, z$ genau das Verhalten zeigt, das wir in § 2 Kapitel I pag. 10 f. charakterisiert haben. Bezeichnen wir mit $0, z_1$, $0, z_2$ die beiden zu verschiedenen Seiten von $0, Z$ gelegenen Punkte, welche eine der Integralkurven von (92) mit der z-Axe gemein hat, so werden wir, wie früher eine Relation

$$z_2 = \sigma(z_1) \tag{93}$$

oder auch, im Anschluss an die frühere Bezeichnung:

$$y_2' = \sigma(y_1') \tag{93a}$$

angeben können. Nun setzen wir nach Gleichung (91):

$$y_2 = \Omega(x, y_2') = \Omega[x, \sigma(y_1')].$$

Setzen wir hierin für y_1' seinen Wert aus (78) in x und y_1, dann auf der rechten Seite für x den Wert 0, so ergibt sich die in Aussicht genommene Relation zwischen y_2 und y_1.

Unter denselben Voraussetzungen über die Verzweigung der Funktion y betrachten wir nunmehr den in Fig. 5 dar-

gestellten Fall des Kurvenverlaufes. Ist S ein singulärer Punkt der Differentialgleichung, so wird diejenige Integralkurve von (92), welche der Kurve CDEH (Fig. 5) zugewiesen ist, wie in nachstehender Fig. 6 verlaufen. Die

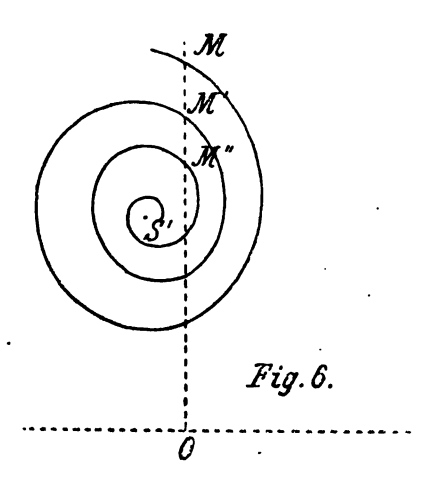


Fig. 6.

Punkte M, M' in Fig. 6, F in Fig. 5 sollen Auf- bez. Grundriss je des gleichen Punktes der Fläche (86) darstellen. Dann werden auch M' und K in dieser Beziehung stehen. Die vertikal über S in Fig. 5 gelegene Stelle des Integralkurvensystems projiziere sich in der xz-Ebene nach S'. Setzen wir für OM, OM' bez. z_3 und z_1, so erwächst die Aufgabe, zwischen z_1 und z_3 eine Relation

$$z_3 = \sigma'(z_1) \tag{94}$$

zu finden, deren rechte Seite nach ganzen steigenden Potenzen von z_1 fortschreitet. Das Bestehen einer solchen Beziehung hat *Poincaré* in seinen mehrfach genannten Arbeiten*) nachgewiesen und gleichzeitig den Weg zu ihrer Herstellung an-

*) Vgl. Liouville's Journal, sér. 3, t. VIII, pag. 255 f.

gegeben. Die Berechnung der im vorigen Paragraphen benutzten Relation (83) erledigt sich nunmehr genau so, wie die soeben durchgeführte Ableitung der Gleichung (82); wir brauchen nur in den bezüglichen Entwickelungen den Index $_2$ überall durch $_3$ und τ durch σ' zu ersetzen.

Schneiden die dem ersten Zweige der Funktion y' zugewiesenen Äste der Charakteristik CDEH.. (Fig. 5) die y-Axe noch in weiteren oberhalb K gelegenen Punkten L..., so wird die durch Gleichung (85) definierte Funktion φ dennoch in allen solchen Punkten je denselben Wert annehmen; denn entspreche dem Punkte M'' mit der Ordinate z_4 der Punkt in der vorhin angezeigten Weise, so ist die Relation zwischen z_4 und z_3 genau dieselbe wie zwischen z_3 und z_1.

Haben wir nun auf dem angegebenen Wege die Relationen (82) und (84) bestimmt, sodann vermittelst der Gleichung (85) φ normiert, mit Hülfe von (83) ψ bestimmt, so hält es nicht schwer, das allgemeine Integral von (76) in der Form

$$C^2 + \varphi^{(1)} C + \varphi^{(2)} = 0 \qquad \textbf{(95)}$$

darzustellen, welche für den ganzen in Betracht kommenden Bereich, mit Einschluss der auf $\Delta = 0$ liegenden Punkte, aber mit selbstverständlicher Ausnahme der singulären Stelle S gültig ist; denn setzen wir

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^{(1)} \equiv \varphi_0^{(1)} + \varphi_1^{(1)} x + \varphi_2^{(1)} y + \cdots \\ \varphi^{(1)} \equiv \varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} x + \varphi_2^{(2)} y + \cdots, \end{array}\right\} \qquad \textbf{(96)}$$

so können wir aus (95) die beiden Zweige von C in der Form

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \omega^{(1)}(x, y) \equiv C_1^{(0)} + \alpha_1^{(1)} x + \alpha_2^{(1)} y + \cdots \\ C_2 = \omega^{(2)}(x, y) \equiv C_2^{(0)} + \alpha_2^{(1)} x + \alpha_2^{(2)} y + \cdots \end{array}\right\} \qquad \textbf{(97)}$$

entwickeln, wobei

$$C_1^0 \text{ willkürlich, } C^{(0)}{}_2 = \psi^{(0)}$$

zu setzen ist. Die Coeffizienten α_{ik}.. sind ebenso gebaut wie die der Entwickelung (38), pag. 24. Identifizieren wir diese

Entwickelungen mit den beiden Zweigen der Integralfläche, wie sie sich unter Zugrundelegung der Anfangsfunktionen (81) und (85) aus (78) bez. (79) ergeben, so gewinnen wir die zur Bestimmung der Coeffizienten von $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ nötigen Relationen.

Wir können unser Schlussresultat noch in etwas anderer Form aussprechen, indem wir auf die Darstellung (20) pag. 10 der Integralfunktion unserer Differentialgleichung zurückgehen, wobei wir der Einfachheit halber wieder $x_0 = 0$ setzen wollen. Die Grösse y_0', welche sich aus der Differentialgleichung für $x = 0$, $y = y_0$ ergibt, möge, um die Ideen zu fixieren, dem ersten Zweig der Funktion y' angehören. Berechnen wir dann die Grösse $\overline{y}_0$ aus

$$\overline{y}_0 = \tau(y_0)$$

[vgl. (82)] und stellen die Entwickelung (20) für die Anfangswerte 0, $\overline{y}_0$, $\overline{y}'_0$ her, wo aber jetzt der Wert $\overline{y}'_0$ dem zweiten Zweige der Funktion y' angehören möge, so liefert uns diese zweite Entwickelung direkt eine analytische Fortsetzung der ersten; in ähnlicher Weise gelangt man vermöge (84) zu einem dritten Element derselben analytischen Funktion u. s. w., wobei wir freilich von der Betrachtung komplexer Wertgebiete der Variabeln gänzlich absehen.

---

§ 3. Die Fläche der infinitesimalen Transformation bei Differentialgleichungen II. Grades.

Beim Studium des Blätterzusammenhangs der ξ-Fläche für Differentialgleichungen höherer Grade stellt sich die weitere Complikation ein, dass in die partielle Differentialgleichung (46), pag. 28, ausser y' noch die willkürliche Funktion ζ ein-

geht, welche ihrerseits Verzweigungen aufweisen kann. Wir haben diese Funktion bei unseren früheren Betrachtungen als eindeutig vorausgesetzt, d. h. die Fläche

$$z = \zeta(x, y) \tag{98}$$

sollte nur aus einem einzigen, über der xy-Ebene sich ausbreitenden Blatte bestehen. Bei Differentialgleichungen höherer Grade ergeben sich nun aber für die Annahme von ζ zwei besonders einfache Möglichkeiten. Entweder, wir lassen ζ wie früher eindeutig, oder aber wir verlangen, dass es genau dieselben Verzweigungen besitze wie die algebraische Funktion y'; d. h. denken wir ζ durch die Gleichung

$$f(x, y, \zeta) = 0$$

definiert, welche wir in bekannter Weise als Fläche deuten, so soll die letztere mit der Fläche der Differentialgleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

in Bezug auf die xy-Ebene die Diskriminantenkurve, sowie Blätteranzahl und -Zusammenhang gemein haben. Eine andere Annahme für ζ würde kein einfaches Resultat ergeben. Sind demzufolge insbesondere die beiden Blätter des Integrals einer Differentialgleichung durch die Gleichungen

$$C = \omega^{(1)}(x, y), \quad C = \omega^{(2)}(x, y),$$

die entsprechenden Blätter der Fläche (98) durch

$$z = \zeta_1(x, y), \quad z = \zeta_2(x, y)$$

gegeben, so liefert die Beziehung

$$\xi\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = f(\omega)$$

sofort die beiden Zweige der Funktion ξ:

$$\xi_i = \frac{f(\omega_i)}{\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \zeta_i \frac{\partial \omega_i}{\partial y}} \qquad (i = 1, 2),$$

wodurch wir der Mühe enthoben werden, die Betrachtungen der vorigen beiden Paragraphen für die Funktion ξ und deren partielle Differentialgleichung noch einmal explizit durchzuführen.

---

§ 4. Verhalten an der Diskriminantenkurve.

Ist x_0, y_0 ein Punkt der Kurve $\Delta = 0$, so werden bekanntlich*) die beiden Zweige der Integralkurve, die sich in diesem Punkte zu einer Spitze vereinigen, durch die Entwickelung dargestellt:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$
$$+ (x - x_0)^{\frac{3}{2}} [A_0 + A_1 (x - x_0)^{\frac{1}{2}} + A_2 (x - x_0)^{\frac{2}{2}} + \ldots]. \quad \textbf{(99)}$$

Dabei ist

$$A_0^2 = - \frac{2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + y_0' \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\right]}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)_0},$$

worin für y_0' jener Wert zu setzen ist, der $F = 0$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 = 0$ zugleich befriedigt.

Die Rechnung zeigt, dass die A_{2n} obiger Entwickelung Produkte von A_0 in rationale Funktionen von x_0, y_0, y_0', die A_{2n+1} dagegen selbst rationale Funktionen dieser Grössen sind. Ausserdem entspricht offenbar jedem Wertepaar von

---

*) S. *Briot* und *Bouquet*, Journal de l'Ecole Polytechnique, cah. 36.

x_0, y_0 nur ein einziger Wert von y_0', der hier in Betracht kommt. Entwickeln wir daher x_0 aus

$$\Delta(x_0, y_0) = 0$$

in der Form:

$$x_0 = m_1 y_0 + \tfrac{1}{2} m_2 y_0^2 + \dots \tag{100}$$

(wobei wir voraussetzen, dass die Kurve (74) durch den Nullpunkt läuft), so können wir auch unser y_0' leicht in der Form

$$y_0' = s_0 + s_1 y_0 + \dots \tag{101}$$

darstellen, indem wir für x_0 seinen Wert in die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 = 0$$

einsetzen und hieraus die Grösse y_0' entwickeln, was für

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)_0 \lesseqgtr 0 \tag{102}$$

stets möglich ist. Setzen wir dann in (99) alle Glieder der rechten Seite, welche ganze Potenzen von $x - x_0$ enthalten, auf die linke und quadrieren, so kommt:

$$\begin{aligned}(y - y_0)^2 - 2(y - y_0)(x - x_0)[y_0' + A_1(x - x_0) + \dots] \\ + (x - x_0)^2 [y_0' + A_1(x - x_0) + \dots]^2 \\ = (x - x_0)^3 A_0^2 [1 + B_2(x - x_0) + B_4(x - x_0)^2 + \dots]^2,\end{aligned}$$

worin die B_i rational in x_0, y_0, y_0' werden. Wegen (102) können wir nun vermöge (100) und (101) alle Coeffizienten $A_i B_i$ nach ganzen Potenzen von y_0 entwickeln. Die niedersten Glieder in x, y, y_0 werden dann

$$[y - s_0 x - (1 - m_1 s_0) y_0]^2 + \text{Glieder 3. Ordnung.}$$

Fassen wir nun etwa $y_0 - a$ (wo a eine feste Constante bedeutet) als Integrationskonstante, resp. als dritte Raumkoordi-

nate auf, so erkennt man, dass unsere Integralfläche im Punkte 0, 0, a einen uniplanaren Knoten besitzt. Da dies für jeden Punkt der Diskriminantenkurve gilt, so folgt: auf dem vertikalen Cylinder $\Delta(x, y) = 0$ besitzt die Integralfläche eine Rückkehrkante, ein Resultat, das auch für jede andere Wahl der Integrationskonstante gilt und übrigens geometrisch leicht vorauszusehen war.

Für die Fläche der infinitesimalen Transformation ergibt sich ein wesentlich anderes Resultat. Ist

$$F \equiv L y'^n + M_1 y'^{n-1} + \ldots + M_n = 0$$

so setzen wir wiederum voraus, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv n L y'^{n-1} + \ldots M_{n-1} \tag{103}$$

für $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ verschwinde, nicht aber $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Die Gleichungen (47) liefern:

$$\xi \frac{dx}{d\xi}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \zeta \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y' \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right] = (\zeta - y')\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Entwickelt man den Ausdruck (103) nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$, $y' - y_0'$ und setzt für $y - y_0$ seinen Wert (99), für $y' - y_0'$ den sich daraus ergebenden:

$$y' - y_0' = \tfrac{3}{2} A_0 (x - x_0)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{2} A_1 (x - y_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots, \tag{104}$$

so wird $\frac{\partial F}{\partial y'}$ durch $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$ und durch keine höhere Potenz dieser Grösse teilbar. Entwickelt man ebenso $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ nach Potenzen von $x - x_0$ etc. und substituiert überall die Ausdrücke (99) bez. (104), so nimmt die Gleichung (104) folgende Gestalt an:

$$\frac{dx}{(x-x_0)^{\frac{1}{2}}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\zeta_0\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0+q_1(x-x_0)^{\frac{1}{2}}+q_2(x-x_0)^{\frac{2}{2}}+\ldots\right]$$

$$=[p_0+p_1(x-x_0)^{\frac{1}{2}}+p_2(x-x_0)^{\frac{2}{2}}+\ldots]\frac{d\xi}{\xi} \qquad (105)$$

oder durch Division, da $p_0 \equiv (\zeta_0 - y'_0)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)_0$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden kann:

$$\frac{dx}{(x-x_0)^{\frac{1}{2}}}[r_0+r_1(x-x_0)^{\frac{1}{2}}+\ldots]=\frac{d\xi}{\xi}; \qquad (106)$$

durch Integration ergibt sich:

$$r\frac{\xi}{\xi_0}=a_1(x-x_0)^{\frac{1}{2}}+a_2(x-x_0)^{\frac{2}{2}}+\ldots \cdot$$

oder

$$\xi=\xi_0[1+b_0(x-x_0)^{\frac{1}{2}}+\ldots].$$

Die Projektion einer Charakteristik der infinitesimalen Transformation auf die zx-Ebene hat also in dem Punkte x_0, ξ_0 eine vertikale Tangente, zeigt aber im Übrigen keine Besonderheit.

Die Charakteristiken der infinitesimalen Transformation berühren also den Cylinder $\Delta = 0$ und haben im Berührungspunkt vertikale Tangenten; $\Delta = 0$ ist also eine singuläre Lösung des simultanen Systems (47)*). Diese Kurve stellt sich mithin für die Fläche der infinitesimalen Transformation als Projektion einer Umrisskurve im gewöhnlichen Sinne dar. Dieser Satz erleidet jedoch eine wichtige Ausnahme.

Ist nämlich

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\zeta_0\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=0, \qquad (107)$$

---

*) Vgl. *Goursat*, Americ. Journal 12. Das *Goursat*'sche Kriterium ist hier nicht unmittelbar zu verwerten.

so erhält man eine Gleichung der Form

$$dx\,[c_0 + c_1(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + c_2(x - x_0)^{\frac{2}{2}} + \ldots] = \frac{d\xi}{\xi}$$

oder

$$\xi = \xi_0\,[1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots],$$

d. h. die Projektion der Charakteristik auf die ξx-Ebene, also auch die Charakteristik selbst hat auf dem Diskriminantencylinder eine Spitze.

Man kann ζ natürlich auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \zeta \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(107 a)}$$

für jeden Punkt x_0, y_0 besteht, welcher der Gleichung (74) genügt. Zunächst können wir annehmen, dass (107 a) identisch besteht. Dann erhalten wir durch Elimination von y' aus (70) und (107 a) eine Gleichung $n$ten Grades in ζ:

$$\varphi(x, y, \zeta) = 0.$$

Man sieht leicht, dass das System der Bahnkurven dann dargestellt ist durch

$$F(x, y, C) = 0,$$

wenn $F(x, y, y') = 0$ die vorgelegte Differentialgleichung ist. Zweitens können wir aber die Grösse y' auch aus (107a) und

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \textbf{(108)}$$

eliminieren. Für $n > 2$ entspricht jedoch das so bestimmte ζ nicht den Verabredungen, die wir im vorigen Paragraphen über die Bahnkurven der infinitesimalen Transformation getroffen haben. ζ würde nämlich in diesem Falle die Verzweigung eines y' tragen, das sich durch Auflösung von

(108) ergäbe. Diese Methode ist also nur für den Fall der Differentialgleichung zweiten Grades

$$L y'^2 + M y' + N = 0 \qquad (109)$$

von Interesse.

Die Gleichung (108) wird hier $2 L y' + M = 0$; es ist ferner:

$$\Delta = 4 L N - M^2,$$

$$\zeta = -\frac{L_x M^2 - 2 L M M_x + 4 L^2 N_x}{L_y M^2 - 2 M L M_y + 4 L^2 N_y}$$

$$= -\frac{L\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} - 4 N L_x\right) + L_x M^2}{L\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} - 4 N L_y\right) + L_y M^2}$$

$$= -\frac{\frac{\partial\left(\frac{\Delta}{L}\right)}{\partial x}}{\frac{\partial\left(\frac{\Delta}{L}\right)}{\partial y}}.$$

Die Bahnkurven der infinitesimalen Transformation werden also dargestellt durch $\Delta = c L$.

Da nun aber für Punkte der Diskriminantenkurve stets die Gleichung gilt:

$$\frac{\frac{\partial(\Phi\Delta)}{\partial x}}{\frac{\partial(\Phi\Delta)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

was auch Φ sein mag, so erkennt man, dass jedes Bahnkurvensystem

$$\Delta \Phi = c$$

ein ζ liefert, das für alle Punkte der Diskriminantenkurve der Gleichung (107 a) genügt.

Jede infinitesimale Transformation also, welche die Diskriminantenkurve in sich überführt, in dem Sinne, dass $\Delta = 0$ unter ihren Bahnkurven enthalten ist, gibt zu Charakteristiken Veranlassung, die auf dem Cylinder (74) Spitzen haben; man sieht auch leicht umgekehrt, dass letzteres nur stattfindet, wenn die Bahnkurven der infinitesimalen Transformation die Kurve $\Delta = 0$ enthalten.

Um diese Verhältnisse an einem einfachen Beispiele zu übersehen, betrachten wir die Differentialgleichung $y' = \sqrt{x}$, deren allgemeines Integral lautet:

$$(y - c)^2 = \tfrac{4}{9} x^3.$$

Eine infinitesimale Transformation unserer Differentialgleichung lautet $Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$; setzen wir $\zeta = 1$, so liefern die Formeln (42) u. a. $\xi = \eta = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$; man erhält so als Gleichung der ξ-Fläche:

$$(\xi - 1)^2 = \xi^2 x,$$

und bestätigt leicht, dass die Gerade $x = 0$, $\xi = 1$ die Umrisskurve dieses Cylinders ist.

---

§ 5. Eindeutige infinitesimale Transformationen der Differentialgleichungen II. Grades.

Wir gehen nunmehr dazu über, eine Besonderheit zu besprechen, welche die Theorie der infinitesimalen Transformation speziell für Differentialgleichungen zweiten Grades darbietet. Sei eine solche in der Form (109) gegeben. Berücksichtigen wir die zweite Verabredung, die wir im vorigen

Paragraphen über ζ getroffen haben, so ordnen die Differentialgleichungen (47) jedem Raumpunkte x, y, ξ zwei und nur zwei Fortschreitungsrichtungen zu, definieren also ein System von ∞^2 Raumkurven, von denen durch jeden Punkt zwei hindurchgehen. Hierdurch ist jedem Punkte des Raumes eine Ebene zugeordnet, nämlich die Ebene jener beiden Fortschreitungsrichtungen. Eine solche Zuordnung von Punkt und Ebene kann in allgemeinster Weise durch eine totale Differentialgleichung:

$$P(x, y, \xi)\, dx + Q(x, y, \xi)\, dy + R(x, y, \xi)\, d\xi = 0 \qquad \textbf{(110)}$$

gegeben werden; die dem Punkte x, y, ξ zugeordnete Ebene ist dann:

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - \xi) = 0. \qquad \textbf{(111)}$$

Wir wollen diese totale Differentialgleichung für unsern Fall aufstellen, wobei wir, wie schon bemerkt, ζ als eindeutig voraussetzen.

Sind y_1' und y_2' die beiden Werte von y', die sich für irgend einen Punkt x, y aus (108) berechnen lassen, so sind die beiden durch den Punkt x, y, ξ gehenden Richtungen definiert durch:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y_i'} = \frac{(\zeta - y_i')(2 L y_i' + M)\, d\xi}{\xi \left[L_x y_i'^2 + M_x y_i' + N_x + \zeta (L_y y_i'^2 + M_y y_i'^2 + N_y) + (2 L y_i' + M) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y_i' \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right]}$$

$$i = 1, 2.$$

Die Ebene dieser beiden Richtungen ist:

$$\begin{vmatrix} X - x, & (\zeta - y_1')(2 L y_1' + M), & (\zeta - y_2')(2 L y_2' + M) \\ Y - y, & y_1'(\zeta - y_1')(2 L y_1' + M), & y_2'(\zeta - y_2')(2 L y_2' + M) \\ Z - \xi, & \xi\, [L_x y_1'^2 + \ldots \quad], & \xi\, [L_x y_2'^2 + \ldots \quad] \end{vmatrix} = 0.$$

Ersetzt man $X - x$, $Y - y$, $Z - \xi$ bez. durch dx, dy, $d\xi$, rechnet die Determinante aus, dividiert durch $y_2' - y_1'$ und drückt die vorkommenden symmetrischen Funktionen von y_1', y_2' durch L, M, N aus, so erhält man folgendes Resultat:

Sei

$$S = L_x + \zeta L_y + 2L\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$T = M_x + \zeta M_y + 2L\frac{\partial \zeta}{\partial x} + M\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$U = N_x + \zeta N_y + M\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$S_1 = N(2M + \zeta M), \qquad S_2 = (2L\zeta - M)N - \zeta M^2,$$

$$T_1 = -N(M + 2L\zeta), \qquad T_2 = L(2N + \zeta M),$$

$$U_1 = (M^2 - 2LN + ML\zeta), \qquad U_2 = -L(2L\zeta + M),$$

so wird die totale Differentialgleichung:

$$(SS_1 + TT_1 + UU_1)\,dx + (SS_2 + TT_2 + UU_2)\,dy + (4LN - M^2)(L\zeta^2 + M\zeta + N)\,d\log\xi = 0.$$

Wir wollen sie noch kürzer in der Form schreiben:

$$A\,dx + B\,dy + C\frac{d\xi}{\xi} = 0. \tag{112}$$

Die Integrabilitätsbedingung einer Gleichung (110), d. h. die Bedingung dafür, dass sich die ∞^2 Ebenen (111) zu Tangentenebenen von ∞^1 Flächen zusammenordnen lassen, ist nun bekanntlich:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial \xi}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

In unserem Falle wird dieselbe:

$$C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) - \left(A\frac{\partial C}{\partial y} - B\frac{\partial C}{\partial x}\right) = 0. \tag{113}$$

Es ist dies, wie man aus der Bedeutung von A, B, C sofort

erkennt, eine partielle Differentialgleichung II. Ordnung für ζ, die wir indes, ihrer Weitläufigkeit wegen nicht in ausgerechneter Gestalt anschreiben wollen. Wir werden sogleich sehen, wie man zu derselben Gleichung auf kürzerem Wege gelangt.

Würden wir nun eine Funktion ζ kennen, welche dieser partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, so würde sich ξ leicht nach dem *Dubois-Reymond*'schen Verfahren durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung I. Ordnung aus der totalen Differentialgleichung (112) ergeben.

Wir wollen uns indessen mit diesem Integrationsverfahren nicht weiter beschäftigen; denn wir werden später nachweisen, dass mit der Auffindung einer Funktion ζ, welche (113) befriedigt, die Integration einer Differentialgleichung (109), also auch die Berechnung aller ihrer infinitesimalen Transformationen im Wesentlichen geleistet ist. Für unsern Zweck ist nur die Bemerkung wichtig, dass die aus (112) zu erhaltenden Flächen der infinitesimalen Transformation einblätterig sind.

Wir können diese Thatsache leicht durch folgende Betrachtung verifizieren:

Sei

$$\Phi(x, y, \xi) = C \tag{114}$$

das Flächensystem, welches das allgemeine Integral von (112) darstellt, nachdem ζ durch (113) bestimmt ist. Zunächst ist klar, dass eine Umrisskurve einer der Flächen (114) sich entweder in die Kurve $\Delta = 0$ oder in eine Integralkurve von (109) projiziert. Der vertikale Cylinder nun, der auf einer der Integralkurven von (109) steht, schneidet eine dieser Flächen offenbar in einer Kurve, welche sich vollständig aus Charakteristiken der infinitesimalen Transformation zusammensetzt. Besässe nun eine der Flächen (114) auf dem Cylinder $\Delta = 0$ eine Umrisskurve, so würde jede der genannten Schnittkurven aus zwei Zweigen von Charakteristiken be-

stehen, welche in einem Punkte des Cylinders $\Delta = 0$ sich oskulieren, während die Tangentenrichtung im Oskulationspunkte vertikal steht. Es würden also in einem jeden solchen Punkte vier der einem beliebigen Raumpunkte zugewiesenen Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen, während das simultane System (47) doch nur zwei solche Richtungen liefert. In gleicher Weise zeigt man, dass auf dem Cylinder (74) zwei Blätter einer Fläche auch nicht vermöge einer Rückkehrkante zusammenhängen können, u. s. w. Aber auch die in § 2 des II. Kapitels charakterisierte Verzweigung kann nicht eintreten, da sich ja, wie (112) lehrt, die Tangentenebene einer Fläche (114) ausser für $\Delta = 0$ nur noch für

$$L\zeta^2 + M\zeta + N = 0,$$

d. h. für

$$\zeta = y'$$

vertikal stellen kann (nicht aber für $\zeta = \infty$). An diesen letzteren Stellen aber hängen zwei Teile eines und desselben Blattes der ξ-Fläche durch's Unendliche in einfachster Weise zusammen, wie wir früher gesehen haben.

Zugleich erkennt man, dass die Charakteristiken der vermöge (112) bestimmten infinitesimalen Transformation ξ, $\xi\zeta$ auf dem Diskriminantencylinder Spitzen haben, dass also nach dem vorigen Paragraphen die Diskriminantenkurve unter den Bahnkurven unserer Transformation enthalten ist.

Wären wir ursprünglich von der Forderung ausgegangen, eine einblätterige Fläche der infinitesimalen Transformation aus den Charakteristiken (47) herzustellen, so hätte die Betrachtung der Verhältnisse auf dem Diskriminantencylinder sofort ergeben, dass die beiden Charakteristiken, welche durch irgend einen Punkt der Fläche hindurchgehen, ganz in ihr enthalten sein müssen, und wir wären so rückwärts zur totalen Differentialgleichung (112) und zur partiellen Differentialgleichung (113) geführt worden.

Wir können daher allgemein den Satz aussprechen:

Ist ζ eine Lösung von (113), so gibt die Funktion ξ, welche durch Integration von (112) bestimmt wird, zusammen mit $\xi\zeta$ eine infinitesimale Transformation:

$$\mathrm{U}f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi\zeta \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \textbf{(115)}$$

welche die beiden Zweige der Differentialgleichung gleichzeitig in sich überführt, und umgekehrt führt die Aufsuchung einer solchen stets auf die beiden Probleme, welche in den Gleichungen (112) und (113) ihren Ausdruck finden.

Rein analytisch könnte man die partielle Differentialgleichung auch folgendermassen ableiten:

Soll die infinitesimale Transformation (115) die beiden Zweige des Integrals von (109) gleichzeitig in sich überführen, so hat ξ den beiden partiellen Differentialgleichungen zu genügen:

$$\xi\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i + \zeta\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_i \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + y_i' \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right]$$
$$+ (\zeta - y_i')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_i \frac{\partial \xi}{\partial x} + y_i'(\zeta - y_i')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_i \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \qquad \textbf{(116)}$$
$$i = 1, 2.$$

Der Index $_i$ deutet an, dass man in dem betr. Ausdruck für y' den Wert y_i' zu setzen hat.

Wir setzen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial \xi}}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial \xi}},$$

multiplizieren (116) nach Substitution dieser Ausdrücke mit $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ und bezeichnen die linken Seiten der Gleichungen sodann mit $A_i f$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür,

dass die beiden Gleichungen (116) eine gemeinschaftliche Lösung zulassen, ist dann die, dass man identisch setzen kann:

$$(A_1 A_2) = A_1(A_2 f) - A_2(A_1 f) = \rho_1 A_1 f + \rho_2 A_2 f, \quad \textbf{(117)}$$

wo ρ_1, ρ_2 irgendwelche Funktionen bedeuten. Vergleicht man die Coeffizienten von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ auf beiden Seiten der Identität (117), so erhält man drei Relationen, aus denen man ρ_1, ρ_2 eliminieren kann. Das Resultat dieser Elimination liefert dann nach Division mit $y_2' - y_1'$ die gewünschte partielle Differentialgleichung für ζ. Übrigens führt sodann die Aufsuchung der gemeinsamen Lösung der Gleichungen (116) wiederum auf die totale Differentialgleichung (112) zurück.

---

§ 6. Diagonalkurven.

Von dem Vorhandensein einer infinitesimalen Transformation, welche die beiden Zweige des Integrals von (109) gleichzeitig in sich überführt, können wir uns noch in anderer Weise Rechenschaft geben.

Um unsere Bezeichnungweise der *Lie*'schen anzupassen, seien

$$y_1' = \frac{Y_1(x, y)}{X_1(x, y)}, \quad y_2' = \frac{Y_2(x, y)}{X_2(x, y)}$$

die Werte von y', welche sich für einen Punkt x, y aus (109) ergeben; dabei ist $X_1 = X_2 = L$, während Y_1 und Y_2 Potenzreihenentwickelungen darstellen, wobei wir voraussetzen, dass der Punkt, für den entwickelt wird, nicht auf $\Delta = 0$ gelegen sei. Seien ferner

$$\xi_1, \ \eta_1, \ \xi_2, \ \eta_2$$

die beiden Zweige einer zu (109) gehörenden infinitesimalen Transformation in dem in § 3 erläuterten Sinne, endlich

$$\omega_1 = C, \quad \omega_2 = C$$

die beiden Zweige des Integrals von (109).

Alle infinitesimalen Transformationen von (109) sind dann in der Form enthalten:

$$U_1 f \equiv (\xi_1 + \rho_1 X_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta_1 + \rho_1 Y_1) \frac{\partial f}{\partial y}$$

oder auch **(118)**

$$U_2 f \equiv (\xi_1 + \rho_1 X_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta_2 + \rho_2 Y_2) \frac{\partial f}{\partial y},$$

wenn wir der Kürze halber ξ_i, η_i noch mit der in den Formeln (40) pag. 26 explizit geschriebenen willkürlichen Funktion $F(\omega_i)$ behaftet denken.

Bestimmen wir jetzt ρ_1, ρ_2 so, dass

$$\xi_1 + \rho_1 X_1 = \xi_2 + \rho_2 X_2,$$
$$\pi_1 + \rho_1 Y_1 = \eta_2 + \rho_2 Y_2,$$

so kann man hieraus ρ_1, ρ_2 berechnen und erhält für die Funktionen Ξ, H der infinitesimalen Transformation, welche die beiden Zweige von (109) gleichzeitig in sich überführt, resp. die Werte:

$$\xi_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1) Y_2 - (\eta_2 - \eta_1) X_2}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} X_2;$$

$$\eta_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1) Y_2 - (\eta_2 - \eta_1) X_2}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} Y_1;$$

oder auch, was dasselbe ist,

$$\xi_2 + \frac{(\xi_2 - \xi_1) Y_1 - (\eta_2 - \eta_1) X_1}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} X_1;$$

$$\eta_2 + \frac{(\xi_2 - \xi_1) Y_1 - (\eta_2 - \eta_1) X_1}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} Y_2.$$

Nimmt man das arithmetische Mittel der beiden Ausdrücke für Ξ bez. H, so findet man leicht:

$$2\,\Xi = \xi_1 + \xi_2 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)(y_2' + y_1') + 2(\eta_2 - \eta_1)}{y_2' - y_1'},$$

$$2\,H = \eta_1 + \eta_2 + \frac{2(\xi_2 - \xi_1)\,y_1' y_2' - (\eta_2 - \eta_1)(y_2' + y_1')}{y_2' - y_1'}, \tag{119}$$

wie man sieht, überall eindeutige Funktionen.

Setzt man $\zeta = \frac{H}{\Xi}$, so hat man für die Lösung der partiellen Differentialgleichung II. Ordnung (113) eine andere Darstellung.

Dass die gefundene infinitesimale Transformation (119) die Diskriminantenkurve in sich überführt, zeigt man wohl am einfachsten folgendermassen:

Denken wir uns das Integral von (109) in der Form

$$C^2 + \varphi C + \phi = (\omega_1 - C)(\omega_2 - C) = 0$$

geschrieben, so zwar, dass

$$\Xi \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + H \frac{\partial \omega_2}{\partial \omega} \equiv 1,$$

dann ist auch:

$$\Xi \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + H \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \equiv 1,$$

und es folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\Xi \frac{\partial(\omega_2 - \omega_1)}{\partial x} + H \frac{\partial(\omega_2 - \omega_1)}{\partial y} = 0.$$

Bezeichnet man also die Bahnkurven der infinitesimalen Transformation Ξ, H mit $\mathfrak{x}$ = const., so folgt:

$$\omega_1 - \omega_2 = f(\mathfrak{x})$$

oder

$$\mathfrak{x} = \Phi(\omega_1 - \omega_2) = \Psi(\varphi^2 - 4\phi).$$

Da nun für $\Delta = 0$ jedenfalls auch $\varphi^2 - 4\psi = 0$, so ist für jeden Punkt der Diskriminantenkurve:

$$\mathfrak{x} = \Psi(0) = \text{const.},$$

d. h. die Diskriminantenkurve ist unter den Bahnkurven unserer infinitesimalen Transformation enthalten. Wir werden diese Bahnkurven sogleich noch genauer charakterisieren.

Es liegt nahe, die Integralkurven der Differentialgleichung (109) selbst als Bahnkurven einer ihrer infinitesimalen Transformationen zu benutzen, in der Art, dass der eine Zweig des Integralsystems durch eine infinitesimale Transformation in sich übergeht, deren Bahnkurvensystem von dem andern Zweig des Integralsystems gebildet wird, und umgekehrt.

Seien ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 die beiden Zweige der so definierten infinitesimalen Transformation, so ist also

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = y_2'; \quad \frac{\eta_2}{\xi_2} = y_1'$$

und man hat:

$$\xi_1\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + y_2'\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right) = F(\omega_1) \tag{120}$$

oder, da

$$y_1' = -\frac{\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\omega}}{\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\omega}},$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{F(\omega_1)}{\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}(y_2' - y_1')}; & \xi_2 &= \frac{-F(\omega_2)}{\dfrac{\partial\omega_2}{\partial y}(y_2' - y_1')}; \\ \eta_1 &= \frac{F(\omega_1)\,y_2'}{\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}(y_2' - y_1')}; & \eta_2 &= \frac{-y_1'F(\omega_2)}{\dfrac{\partial\omega_2}{\partial y}(y_2' - y_1')}. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Betrachten wir (vgl. Fig. 7) das unendlich kleine Parallelogramm A B C D, welches von zwei Paaren aufeinanderfolgender Integralkurven gebildet wird, die resp. verschiedenen Zweigen angehören. Die Projektionen von A D, D C auf die x-Parallele durch A und auf die y-Parallele durch C sind bis auf unendlich kleine Grössen II. Ordnung resp. gleich $\xi_1 \delta t$, $\xi_2 \delta t$, $\eta_1 \delta t$, $\eta_2 \delta t$.

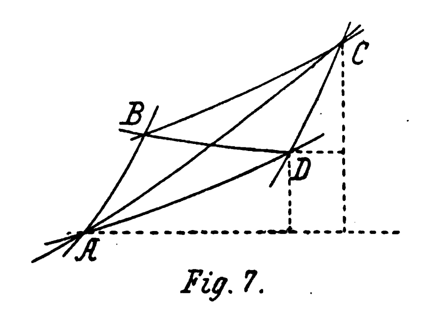


Fig. 7.

Setzt man in (120) und (121) F der Einfachheit halber gleich 1, so erkennt man aus der Figur unmittelbar, dass die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = \frac{1}{y_2' - y_1'} \left(\frac{1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial y}} - \frac{1}{\frac{\partial \omega_2}{\partial y}} \right) \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{y_2' - y_1'} \left(\frac{y_2'}{\frac{\partial \omega_1}{\partial y}} - \frac{y_1'}{\frac{\partial \omega_2}{\partial y}} \right) \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

bezw.

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi_1 - \xi_2 = \frac{1}{y_2' - y_1'} \left(\frac{1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial y}} + \frac{1}{\frac{\partial \omega_2}{\partial y}} \right) \\ \eta' &= \eta_1 - \eta_2 = \frac{1}{y_2' - y_1'} \left(\frac{y_2'}{\frac{\partial \omega_1}{\partial y}} + \frac{y_1'}{\frac{\partial \omega_2}{\partial y}} \right) \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

wiederum infinitesimale Transformationen ergeben, welche (109) in sich überführen. Da ξ, η bei Vertauschung von ω_1 und ω_2 bez. y_1' und y_2' ungeändert bleiben, ξ', η' dagegen das Zeichen wechseln, so hat man in (122) eine infinitesimale Transformation vor sich, die für beide Zweige identisch dieselbe ist, während (123) eine Transformation darstellt, welche für die beiden Zweige bis aufs Vorzeichen dieselbe ist. Die Bahnkurven dieser infinitesimalen Transformationen stellen, wie Fig. 7 lehrt, die beiden zu einer gewissen Anordnung der Integralkurven von (109) gehörigen Diagonalkurvensysteme dar. Man erkennt leicht an einer Figur, dass das eine dieser Systeme die Diskriminantenkurve enthalten muss, während die Kurven des andern durch die Spitzen der Integralkurven in der Richtung der betreffenden Rückkehrtangente hindurchgehen; aus dem letzteren Grunde gehen also ξ', η' längs einer Bahnkurve in einem Punkte der Diskriminantenkurve durch's Unendliche vom Positiven zum Negativen über, während andererseits ξ und η in solchen Punkten, allgemein zu reden, endlich bleiben, wie auch die Formeln (122) und (123) zeigen.

Da umgekehrt die Bahnkurven jeder infinitesimalen Transformation, welche die beiden Zweige von (109) gleichzeitig in sich überführen soll, offenbar ein solches Diagonalsystem darstellen müssen, so können wir schiesslich den Satz aussprechen:

Die Lösungen der partiellen Differentialgleichung (113) sind in der Formel $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$ enthalten, wo η und ξ aus (122) zu entnehmen sind. Die rechten Seiten von (122) enthalten natürlich noch eine willkürliche Funktion.

Bemerken wir noch, dass die Kenntnis von $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$, sowie auch die von $\zeta' = \frac{\eta'}{\xi'}$ hinreicht, um die Integration von (109) auf Quadraturen zurückzuführen. Denn mit ζ ist auch

(vgl. Fig. 7) $\sphericalangle$ CAD gegeben; da ausserdem $\sphericalangle$ CDA bekannt ist, so kennt man den Quotienten

$$\frac{CD}{AD}$$

für jeden Punkt der Ebene. Diese Kenntnis reicht bekanntlich aus, um unser Integrationsproblem zu erledigen.*)

Zur Erläuterung der in diesem Paragraphen besprochenen Verhältnisse sei als Beispiel die Differentialgleichung

$$y'^2 + 2cxy' + bx^2 + 2ay = 0 \qquad \textbf{(124)}$$

angeführt, welche die infinitesimale Transformation

$$Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \textbf{(125)}$$

zulässt; die Bahnkurven dieser Transformation sind also

$$y = Cx^2. \qquad \textbf{(126)}$$

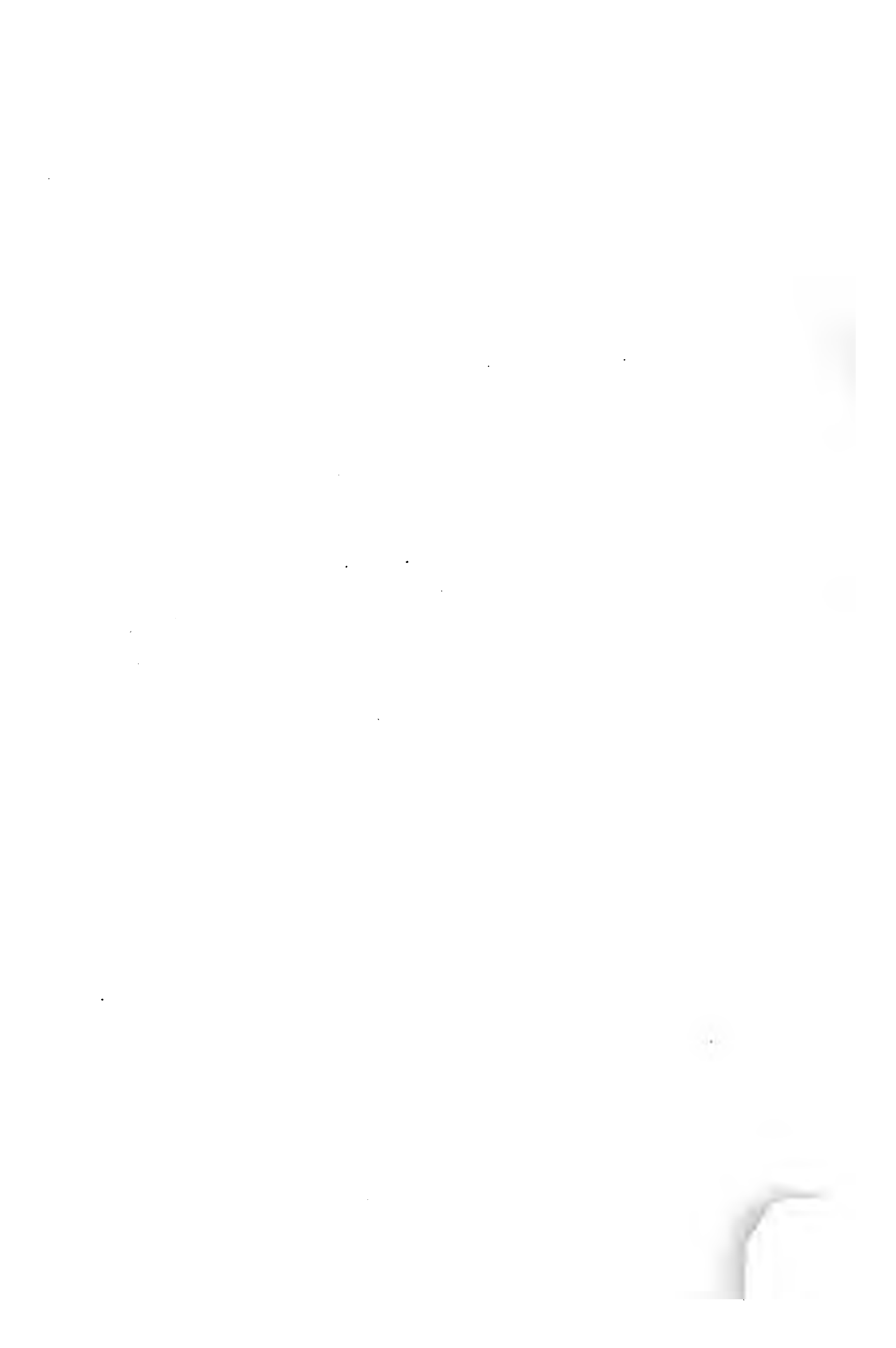
Da der Nullpunkt eine singuläre Stelle der Differentialgleichung (124) darstellt und letztere in erster Annäherung für das Verhalten der allgemeinsten Differentialgleichung höheren Grades typisch ist**), so dürfen wir schliessen, dass uns durch (126) das Verhalten der Bahnkurven einer infinitesimalen Transformation der besprochenen Art, und durch (125) das der Transformationsfunktionen selbst für eine singuläre Stelle der Differentialgleichung (70) in erster Annäherung gegeben ist. Wir haben somit durch unsere Festsetzungen über die Bahnkurven der infinitesimalen Transformation für die letztere das denkbar einfachste Verhalten erzielt, wie wir in der Einleitung in Aussicht nahmen.

*) *Lie,* a. a. O., Kap. 9, § 2, Satz 4.
**) Vgl. *Dyck,* a. a. O., Bd. XXI, Heft I.

Inhalt.

VITA.

Der Verfasser, **Eduard Ritter von Weber,** wurde geboren den 12. Mai 1870 zu München. Seine Eltern sind der verstorbene *Eduard Ritter v. Weber,* kgl. bayer. Lieutenant, und *Pauline v. W.,* geb. *Probst.* Er besuchte 1879 bis 1888 das Maximiliansgymnasium zu München, das unter der Leitung *Linsmayer*'s, später *N. Wecklein*'s stand. Nach bestandenem Gymnasialabsolutorium wurde ihm die Auszeichnung zu teil, in das kgl. Maximilianeum zu München aufgenommen zu werden. Als Angehöriger desselben oblag er in den Jahren 1888 bis 1892 seinen mathematischen, physikalischen und astronomischen Studien an der Universität München unter den Herren Proff. *Bauer, Lommel, Pringsheim, Seeliger,* sowie als Hospitant der kgl. technischen Hochschule unter den Herren Proff. *v. Braunmühl, Dyck* und *Voss.* Im Sommer 1892 bearbeitete er die Preisaufgabe der allgemeinen Abteilung der kgl. technischen Hochschule, und wurde ihm für die vorliegende Arbeit ein erster Preis zuerkannt, aber aus formellen Gründen nicht ausgefolgt. Nach Ablegung der mathematischen Staatsprüfung bezog er 1892 die Universität Göttingen. Für die stets gütige Förderung seiner Studien ist er seinen hochverehrten Lehrern zu bleibendem Danke verpflichtet.




DUE MAY 18 1927
DUE APR 15 '40

